Funções Aritméticas

João Pedro

January 31, 2023

Problem 1 (ISL 2011) Para todo inteiro $d > 0$, seja $f(d)$ o menor inteiro que possui exatamente d divisores positivos (Por exempo nós temos $f(1) = 1, f(5) = 16$, e $f(6) = 12$). Prove que para todo inteiro $k \geq 0$ o número $f\left(2^k\right)$ divide $f\left(2^{k+1}\right)$.

Problem 2 (ISL 2004) Seja $\tau(n)$ o número de divisores do inteiro positivo n. Prove que existem infinitos inteiros positivos a tal que a equação $\tau(an) = n$ não possui uma solução inteira positiva n.

Problem 3 (USA TSTST 2016) Suponha que n e k são inteiros positivos tais que

$$1 = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi(}_{k \text{ times}}n)\ldots)).$$

Prove que $n \leq 3^k$.

Problem 4 (ISL 2012) Para um inteiro não negativo n, defina $\operatorname{rad}(n) = 1$ se $n = 0$ ou $n = 1$, e $\operatorname{rad}(n) = p_1 p_2 \cdots p_k$ onde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são todos fatores primos de n. Encontre todos os polinômios $f(x)$ com coeficientes inteiros não negativos tal que $\operatorname{rad}(f(n))$ divide $\operatorname{rad}(f(n^{\operatorname{rad}(n)}))$ para todo inteiro n não negativo.

Problem 5 (USA TSTST 2015) Seja $\varphi(n)$ o número de inteiros positivos menores que n que são primos entre si com n. Prove que existe um inteiro positivo m para qual a equação $\varphi(n) = m$ tem pelo menos 2015 soluções em n.

Problem 6 (USA TST 2018) Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo, e $\sigma(n)$ a soma dos divisores positivos de n. Prove que o n^{th} menor inteiro positivo relativamente primo com n é pelo menos $\sigma(n)$, e determine para quais n a igualdade acontece.

Problem 7 (China TST 2021) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tal que para todos os inteiros positivos m, n com $m \geq n$,

$$f(m\varphi(n^3)) = f(m) \cdot \varphi(n^3).$$

Problem 8 (ISL 2005) Denote por $d(n)$ o número de divisores positivos de n. Um inteiro positivo n é chamado de muito divisível se $d(n) > d(m)$ para todos os inteiros positivos $m < n$. Dois inteiros muito divisíveis m e n com $m < n$ são chamados de consecutivos se não existe um inteiro muito divisível s satisfazendo $m < s < n$.

(a) Mostre que existem apenas um número finito de pares de inteiros consecutivos muito divisíveis da forma (a, b) com $a \mid b$.

(b) Mostre que para cada primo p existem infinitos inteiros muito divisíveis r tal que pr também é muito divisível.

Problem 9 (China TST 2012) Para um inteiro positivo n, denote por $\tau(n)$ o número de seus divisores positivos. Para um inteiro positivo n, se $\tau(m) < \tau(n)$ para todo $m < n$, chamamos n de um número bom. Prove que para qualquer inteiro positivo k, existem apenas finitos números bons não divisíveis por k

Prove that for any positive integer k, there are only finitely many good numbers not divisible by k.

Problem 10 (USA TSTST 2018) Para todo inteiro positivo N, seja $\sigma(N)$ a soma dos divisores positivos de N. Encontre todos os inteiros $m \geq n \geq 2$ satisfazendo

$$\frac{\sigma(m)-1}{m-1} = \frac{\sigma(n)-1}{n-1} = \frac{\sigma(mn)-1}{mn-1}.$$

Problem 11 (China TST 2017) Seja n um inteiro positivo. Seja D_n o conjunto dos divisores de n e seja $f(n)$ o menor natural m tal que os elementos de D_n são distintos dois a dois módulo m. Mostre que existe um natural N tal que para todo $n \geq N$, temos que $f(n) \leq n^{0.01}$.

Problem 12 (China TST 2014) Para um inteiro positivo $k > 1$, seja $f(k)$ o número de maneiras de fatorar k em um produto de inteiros positivos maiores que 1 (A ordem dos fatores não é levada em consideração, por exemplo, $f(12) = 4$, já que 12 pode ser fatorado destas 4 maneiras: $12, 2\cdot 6, 3\cdot 4, 2\cdot 2\cdot 3$). Prove que se n é um inteiro positivo maior que 1, e p é um fator primo de n, então $f(n) \leq \frac{n}{p}$

Problem 13 (ISL 2020) Para um inteiro positivo n, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n, e seja $\varphi(n)$ o número de inteiros positivos não excedendo n que são coprimos com n. Existe uma constante C tal que

$$\frac{\varphi(d(n))}{d(\varphi(n))} \leq C$$

para todo $n \geq 1$?

Problem 14 (ELMO 2020) Para todo inteiro positivo n, defina $\tau(n)$ como o número de divisores positivos de n, $\sigma(n)$ como a soma dos divisores positivos de n, e $\varphi(n)$ como o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são relativamente primos com n.

Sejam $a, b > 1$ inteiros. Brandon tem uma calculadora com 3 botões que trocam o inteiro n na tela por $\tau(n)$, $\sigma(n)$, ou $\varphi(n)$, respectivamente. Prove que se a calculadora mostra o número a inicialmente, então Brandon pode fazer a calculadora mostraro número b após um número finito (possivelmente nulo) de sequência de operações com os botões.

Problem 15 (Korea 2018) Seja n um "número bom" se a soma dos divisores de n é menor que $2n$ para $n \in \mathbb{Z}$. Determine se existe um conjunto infinito M que satisfaz a seguinte proposição:

Para todo $a, b \in M$, $a + b$ é um número bom. ($a = b$ é permitido.)