Alguns problemas sobre recorrência

Carlos Gustavo Moreira
IMPA

1) Seja n um inteiro e $(x_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por $x_1 = n$ e, para cada $n \geq 1$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$. Prove que, para todo $n \geq 1$, se p é divisor primo de x_n então $p > n$.

2) (P6-OBMU-2011). Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros não todos nulos que satisfaz uma recorrência linear de ordem k para um certo inteiro positivo k fixado, i.e., existem constantes reais $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que $x_{n+k} = \sum_{r=1}^{k} c_r x_{n+k-r}, \forall n \geq 0$. Suponha que k é o menor inteiro positivo com essa propriedade. Prove que $c_j \in \mathbb{Z}$ para todo j com $1 \leq j \leq k$.

3) (P3-OBM-Níveis 3 e U-2021). Encontre todos os inteiros positivos k para os quais existe um irracional $\alpha > 1$ e um inteiro positivo N tal que $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é um quadrado perfeito menos k para todo n inteiro com $n > N$.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x.

4) (P3-OBMU-2022). Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de inteiros. Definimos $a_n^{(0)} = a_n$, para todo n natural. Para todo inteiro $M \geq 0$, definimos $(a_n^{(M+1)})_{n\in\mathbb{N}}$: $a_n^{(M+1)} = a_{n+1}^{(M)} - a_n^{(M)}, \forall n \in \mathbb{N}$. E dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $(M+1)$-autorreferente se existem k_1 e k_2 naturais fixados, tais que $a_{n+k_1} = a_{n+k_2}^{(M+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Existe uma sequência de inteiros tal que o menor M para o qual ela é M-autorreferente é $M = 2022$?

b) Existe uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que o menor M para o qual ela é M-autorreferente é $M = 2022$?