Veja Como Miquel e Quadriláteros se Completam!

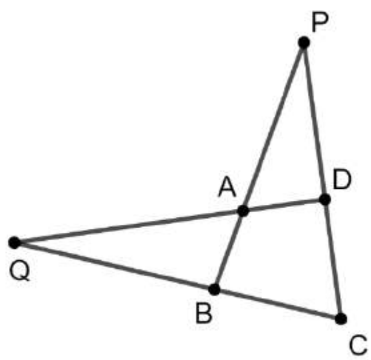
26ª Semana Olímpica – Rio de Janeiro, RJ

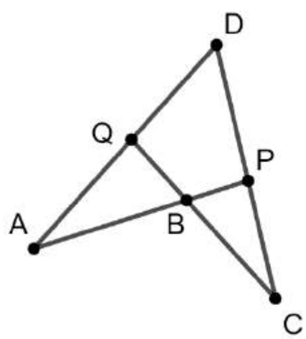
Prof. Davi Lopes – Nível 3

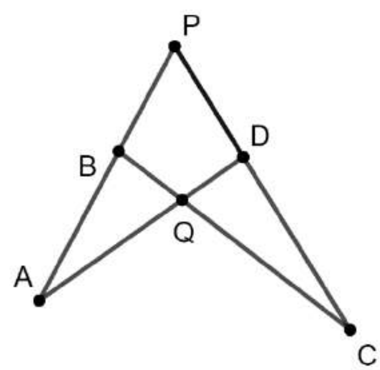
1. Resumo Teórico

1.1. Definindo Quadriláteros Completos

Um quadrilátero complete consiste de quatro retas, sem três delas concorrentes, nem duas delas paralelas, e os seis pontos de interseção que eles determinam. Qualquer quadrilátero com lados não paralelos determina um quadrilátero completo estendendo seus lados. As figuras a seguir ilustram esse conceito, seja para quadriláteros convexos ou não.

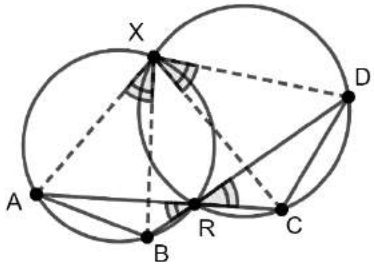






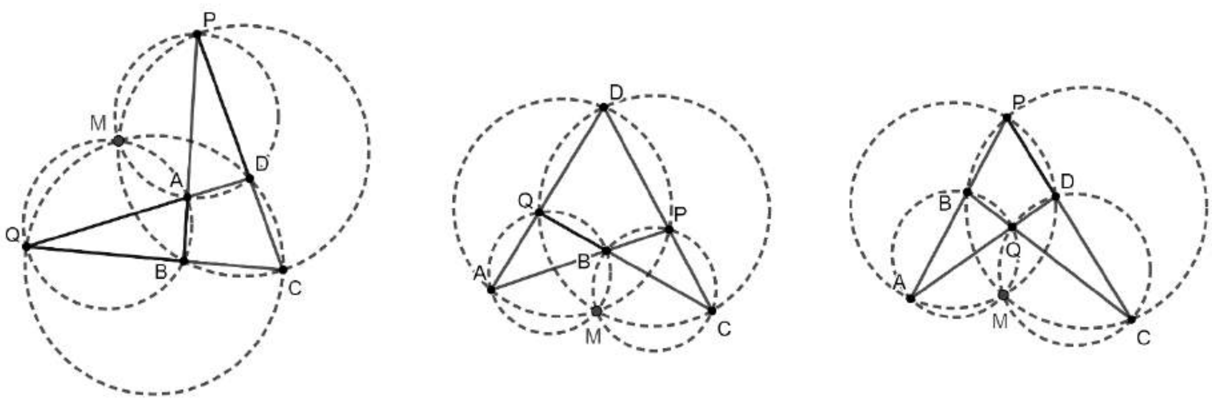
1.2. Fatos Geométricos Preliminares

As propriedades a seguir são muito importantes não somente no estudo dos quadriláteros completos, mas também na geometria plana como um todo. Não demonstraremos esses resultados durante nossa aula, mas como é bom o leitor ter ciência deles, vamos apresenta-los pra vocês já ficarem cada vez mais chegados.

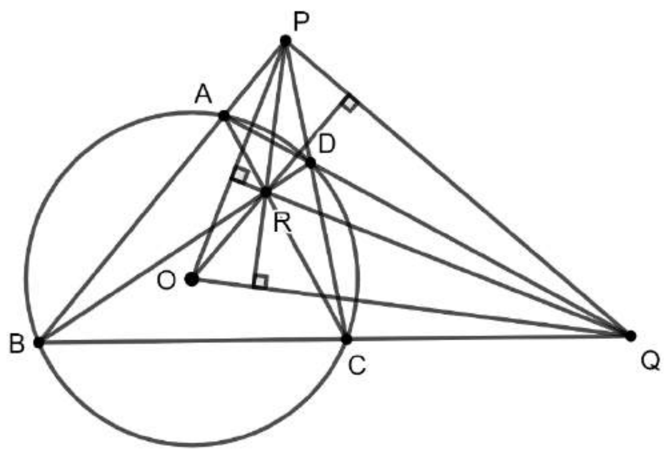


Localização do Centro de Roto-Homotetia: O centro da roto-homotetia que leva o segmento $\overline{AB}$ no segmento $\overline{CD}$ (com A sendo levado em C e B sendo levado em D) é o ponto $X \neq R$ de interseção dos circuncírculos de ABR e CDR. Com isso, X é o centro da roto-homotetia que leva $\overline{AB}$ em $\overline{CD}$ e também o centro da roto-homotetia que leva $\overline{AC}$ em $\overline{BD}$.

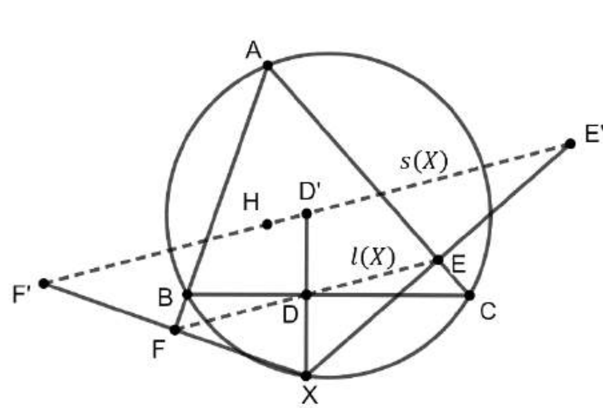
Ponto de Miquel do Quadrilátero Completo: Seja $ABCD$ um quadrilátero completo e considere $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $Q = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Então, os circuncírculos dos triângulos PAD, PBC, QAB e QCD concorrem num ponto M, denominado ponto de Miquel de $ABCD$. Tal ponto de Miquel é o centro da roto-homotetia que leva $\overline{AB}$ em $\overline{DC}$ e da roto-homotetia que leva $\overline{AD}$ em $\overline{BC}$.



Teorema de Brokard: Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito numa circuneferência Γ e O é seu circuncentro, então $\overleftrightarrow{PQ}$ é a polar de R relativo a Γ. Em particular, O é ortocentro de PQR.



Reta de Simson e Reta de Steiner: Seja ABC um triângulo de ortocentro H e circuncentro Γ. Seja X um ponto sobre Γ e sejam D, E, F os pés das perpendiculares de X a $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Então D, E, F são colineares e a reta $l(X)$ que passa por tais pontos é conhecida como a reta de Simson de M relativo a ABC.



Se D', E', F' são pontos sobre as semirretas $\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{XE}, \overrightarrow{XF}$, respectivamente, tais que D, E, F

são pontos médios de $\overline{D'X}, \overline{F'X}, \overline{F'X}$, respectivamente, então D', E', F' determinam uma reta $s(X)$ paralela a $l(X)$. A reta $s(X)$ é conhecida como a reta de Steiner de X relativo a ABC, e além disso temos que H está em $s(X)$.

1.3. Propriedades Gerais dos Quadriláteros Completos

No que segue, considere o quadrilátero completo $ABCD$, e sejam $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, $Q = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$, $R = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$. Denote também, para cada triângulo XYZ, H_{XYZ} e O_{XYZ} como sendo o ortocentro e o circuncentro de XYZ, respectivamente.

Propriedade 1: $M, O_{ABQ}, O_{CDQ}, O_{PAD}, O_{PBC}$ estão numa mesma circunferência ω;

Propriedade 2 (Reta de Aubert): $H_{ABQ}, H_{CDQ}, H_{PAD}, H_{PBC}$ são colineares, e a reta que eles determinam é denominada reta de Aubert do quadrilátero completo $ABCD$.

Propriedade 3: As três circunferências com diâmetros $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{PQ}$ são coaxiais, e seu eixo radical comum é a reta de Aubert de $ABCD$.

Propriedade 4 (Reta de Gauss): Os pontos médios de $\overline{AC}, \overline{BD}$ e $\overline{PQ}$ são colineares.

Propriedade 5 (Extraversão no Ponto de Miquel): Os ângulos $\angle AMC, \angle BMD, \angle PMQ$ compartilham uma bissetriz interna comum, e $MA.MC = MB.MD = MP.MQ$.

Se além disso $ABCD$ é inscrito numa circunferência Γ de centro O, temos também as seguintes propriedades adicionais:

Propriedade 6: P, M, Q são colineares.

Propriedade 7: M está nos circuncírculos dos triângulos AOC e BOD,

Propriedade 8: Se φ é a inversão com respeito a Γ, então $\varphi(M) = R$. Em particular, O, R, M são colineares, e tal reta é a bissetriz interna comum aos ângulos $\angle AMC, \angle BMD, \angle PMQ$.

Propriedade 9 Se $P' = \varphi(P)$ e $Q' = \varphi(Q)$, então:

- P, R, Q' são colineares e Q, R, P' são colineares.
- $ABRQ', BCRP', CDQ'R$ e $DAP'R$ são cíclicos.
- $ABP'O, BCQ'O, CDOP', DAOQ'$ são cíclicos.
- $AP'CQ, BP'DQ, AQ'CP, BQ'DP$ são cícicos.

Propriedade 10: O está na circunferência ω da Propriedade 1 e R está na reta de Aubert de $ABCD$. Além disso, a reta de Aubert de $ABCD$ é o eixo radical de Γ e ω.

2. Exercícios Básicos

Exercício 1: Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico, $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$ e M seu ponto de Miquel. Prove que $ME^2 - MF^2 = OE^2 - OF^2$.

Exercício 2: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$. Sejam I, J os pontos médios de AC e BD, respectivamente. Prove que $ABCD$ é um quadrilátero cíclico se, e somente se, $\angle EIF + \angle EJF = 180°$.

Exercício 3 (China/1992): Seja $ABCD$ cíclico de centro O. As diagonais AC, BD se intersectam em P. (ABP) e (CDP) se intersectam em P, Q. Se O, P, Q são distintos, prove que $\angle OQP = 90°$.

Exercício 4 (Rússia/1999): No triângulo ABC, D está em BC e E está em AB. (ABD) e (BCE) se intersectam novamente em F. Se A, E, D, C são concíclicos, prove que $\angle BFO = 90°$.

Exercício 5: Um círculo com o centro O passa pelos vértices A e C do triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N, respectivamente. Seja $M \neq B$ o ponto de intersecção dos circuncírculos dos triângulos ABC e KBN. Provar que $\angle OMB = 90°$.

Exercício 6 (IMO Shortlist/1995): Suponha que $ABCD$ é um quadrilátero cíclico, sejam $E = AC \cap BD$, $F = AB \cap CD$. Prove que F está na reta ligando os ortocentros de EAD, EBC.

Exercício 7 (USAMO/2006): Seja $ABCD$ um quadrilátero, e sejam E, F pontos sobre AD e BC, respectivamente, tais que $AE/ED = BF/FC$. A semirreta $\overrightarrow{FE}$ intersecta as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CD}$ em S, T, respectivamente. Prove que $(SAE), (SBF), (TCF), (TDE)$ passam por um mesmo ponto.

Exercício 8 (PAGMO/2022 – Adapatada): Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. P, Q são pontos sobre o lado BC tais que AP, AQ são cevianas isogonais de ABC. Os pontos P_1, Q_1 estão sobre AP, AQ, respectivamente, tais que P_1Q é perpendicular a AB e Q_1P é perpendicular a AC. Se B, P_1, Q_1 são colineares, prove que AQ_1PB é cíclico.

Exercício 9 (USAMO/2013): No triângulo ABC, pontos P, Q, R estão sobre os lados BC, CA, AB, respectivamente. Sejam $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ os circuncírculos de AQR, BRP, CPQ, respectivamente. Dado que AP intersecta $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ novamente em X, Y, Z, respectivamente, prove que $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

Exercício 10 (IMO/2005): Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo fixo com $BC = DA$ e $BC \nparallel DA$. Sejam E, F dois pontos variáveis sobre BC, DA, respectivamente, tais que $BE = DF$. $AC \cap BD = P$, $BD \cap EF = Q$ e $AC \cap EF = R$. Prove que os circuncírculos dos triângulos PQR, quando E, F variam, passam por um ponto fixo $S \neq P$.

3. Problemas Propostos

Problema 1 (NIMO/2014): Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e seja M o ponto médio de BC. Seja ω_B a circunferência passando por B, H, M e ω_C a circunferência passando por C, H, M. Retas AB e AC intersectam ω_B e ω_C novamente em P, Q, respectivamente. As semirretas PH e QH intersectam ω_C e ω_B novamente em R, S, respectivamente. Mostre que ΔBRS e ΔCRS possuem mesma área.

Problema 2 (Teste IMO-USA/2007): Circunferências ω_1, ω_2 se intersectam em P, Q. Segmentos AC e BD são cordas em ω_1, ω_2, respectivamente, tais que $P = AB \cap CD$. A semirreta BD e o segmento AC se cortam em X. O ponto $Y \in \omega_1$ é tal que $PY \parallel BD$. O ponto Z está em ω_2 tal que $PZ \parallel AC$. Prove que Q, X, Y, Z são colineares.

Problema 3 (USAMO/2013): Seja ABC um triângulo. Determine todos os pontos P sobre o segmento BC satisfazendo a seguinte propriedade: se X, Y são as interseções de PA com as tangentes externas comuns a $(PAB), (PAC)$, então:

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB.PC}{AB.AC} = 1$$

Problema 4 (Teste IMO-USA/2007): O triângulo acutângulo ABC está inscrito na circunferência ω. As tangentes a ω por B, C se intersectam em T. O ponto S está em $\overrightarrow{BC}$, tal que $AS \perp AT$. Os pontos B_1, C_1 estão em $\overrightarrow{ST}$ (com C_1 entre B_1 e S), tal que $B_1T = BT = C_1T$. Prove que ABC e AB_1C_1 são semelhantes.

Problema 5: Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $AB < AC$. Sejam M, N os pontos médios de AB, AC, respectivamente. Seja AD uma altura nesse triângulo. Um ponto K é escolhido no segmento MN de modo que $BK = CK$. A semirreta KD intersecta o circuncírculo ω de ABC em Q. Prove que C, N, K, Q são concíclicos.

Problema 6: Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico, $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F, AC \cap BD = H$. $P \neq AB$ tal que $\angle DFH = \angle PFC$. M, N são os pontos médios de AC, BD, respectivamente, $PM \cap BC = T$ e $PN \cap AD = S$. Prove que AB bissecta TS.

Problema 7 (IMO Shortlist/2006): Seja ABC um triângulo e A_1, B_1, C_1 pontos sobre BC, CA, AB, respectivamente. $(AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1)$ intersectam (ABC) novamente em A_2, B_2, C_2, respectivamente. A_3, B_3, C_3 são os simétricos de A_1, B_1, C_1 com respeito aos pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Prove que $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ são semelhantes.

Problema 8 (IMO Shortlist/2005): Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB \neq AC$. Seja H o ortocentro de ABC e seja M o ponto médio de BC. Seja D um ponto sobre AB e E um ponto sobre AC tal que $AE = AD$ e D, H, E são colineares. Prove que a reta HM é perpendicular à corda comum dos circuncírculos de ABC e ADE.

Problema 9 (Balcânica/2009): Seja ABC um triângulo, e $M \in AB$, $N \in AC$, tais que $MN \parallel BC$. BN e CM se intersectam em P. (BMP) e (CNP) se intersectam novamente em Q. Prove que $\angle BAQ = \angle CAP$.

Problema 10 (USA TSTST/2012): O triângulo ABC está inscrito numa circunferência Ω. A bissetriz interna de $\angle A$ intersecta BC e Ω em D e $L \neq A$, respectivamente. Seja M o ponto médio de BC. O circuncírculo de ADM intersecta AB e AC novamente em Q e P, respectivamente. Seja N o ponto médio de PQ, e seja H o pé da perpendicular de L à reta ND. Prove que a reta ML é tangente ao circuncírculo de HMN.

Problema 11: Seja ABC um triângulo escaleno, com $\angle C = 90°$, e seja D o pé da altura relativo a C. Seja X um ponto no interior do segmento CD. Seja K o ponto no segmento AX, tal que $BK = BC$. Similarmente, seja L um ponto no segmento BX, tal que $AL = AC$. O circuncírculo de DKL intersecta o segmento AB em $T \neq D$. Prove que $\angle ACT = \angle BCT$.

Problema 12 (USA TSTST/2012): Seja $ABCD$ um quadrilátero satisfazendo $AC = BD$. As diagonais AC e BD se intersectam em P. Sejam $\omega_1(O_1)$ e $\omega_2(O_2)$ os circuncírculos de ABP e CDP, respectivamente. O segmento BC intersectam ω_1, ω_2 novamente em S, T, respectivamente. Sejam M, N os pontos médios dos arcos SP (não contendo B) e TP (não contendo C). Prove que $MN \parallel O_1O_2$.

Problema 13 (USA IMO TST/2009): Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC. Sejam O_B, O_C os circuncentros de ABD e ACD, respectivamente. Suponha que B, C, O_B, O_C estão numa circunferência de centro X, e seja H o ortocentro de ABC. Prove que $\angle DAX = \angle DAH$.

Problema 14 (IMO Shortlist/2009): Dado um quadrilátero cíclico $ABCD$, as diagonais AC e BD se intersectam em E e as retas AD, BC se intersectam em F. Os pontos médios de AB e CD são G, H, respectivamente. Mostre que EF é tangente em E a (EGH).

Problema 15 (OBM/2015): Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, CA, AB, respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC.

Problema 16 (EGMO/2022): Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com circuncentro O. As bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ se intersectam em X, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ se intersectam em Y, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle C$ e $\angle B$ se intersectam em Z e as bissetrizes internas dos ângulos $\angle D$ e $\angle A$ se intersectam em W. Ademais, as diagonais AC e BD se intersectam em P. Prove que O, X, Y, Z, W estão numa mesma circunferência se, e somente se, P, X, Y, Z, W estão numa mesma circunferência.

Problema 17 (OBM/2016): Seja $ABCD$ um quadrilatero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilatero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilatero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J, M são colineares.

Problema 18 (OMpD/2022 - Generalização): Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e M, N pontos médios sobre AB e CD respectivamente, tais que $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$. As diagonais AC e BD se intersectam em L. Suponha que o circuncírculo de LMN, de centro T, intersecta o circuncírculo de $ABCD$ em dois pontos distintos X, Y. Se a reta MN intersecta a reta XY em S e a reta XM intersecta a reta YN em P, prove que PL é perpendicular a ST.

Problema 19 (Olimφíada/2022): Seja ABC um triângulo, I seu incentro e ω seu incírculo. Seja D, E, F os pontos de tangência de ω com BC, CA, AB, respectivamente, e M, N, P os respectivos pontos médios de BC, CA e AB. Seja D' a segunda interseção de DI com ω, Q a interseção de DI com EF e $U \neq Q$ a interseção de $(AD'Q)$ e (DMQ). Suponha que U está no circuncírculo de BDF. Prove que PN, AM, UF são concorrentes.

Problema 20 (IMO/2021): Seja ABC um triângulo acutângulo e seja D um ponto em seu interior tal que $\angle DAB = \angle CAD$. O ponto E está sobre o segmento AC e satisfaz $\angle ADE = \angle BCD$. O ponto F está sobre o segmento AB e satisfaz $\angle FDA = \angle DBC$. O ponto X está sobre a reta AC e satisfaz $CX = BX$. Sejam O_1, O_2 os circuncentros dos triângulos ADC e EXD, respectivamente. Prove que as retas BC, EF e O_1O_2 são concorrentes.