Teoria de Ramsey Aditiva

Semana Olímpica 2023 - Rio de Janeiro

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

1 Ramsey, Schur e Hilbert

Teorema 1.1. (Ramsey, 1930) Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que vale o seguinte: toda r-coloração das arestas de K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

Teorema 1.2. (Schur, 1916) Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x + y = z$.

Exercício 1.3. Mostre que a equação $x^n + y^n = z^n$ possui solução não trivial $\pmod p$ para todo primo p suficientemente grande.

Definição 1.4. Um cubo de Hilbert de dimensão k é um conjunto da forma

$$\{a + \sum_{i \in S} d_i \mid S \subset \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

para algum $a \in \mathbb{N}$ e conjunto $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ de k inteiros positivos distintos.

Teorema 1.5. (Cubo de Hilbert, 1892) Toda r-coloração dos inteiros positivos cotém cubos de Hilbert monocromáticos de dimensão arbitrariamente grande.

2 O teorema de Van der Waerden

Questão 2.6. Vale o mesmo resultado do teorema 1.2 para a equação $x + y = 2z$?

Teorema 2.7. (Van der Waerden, 1927) Toda r-coloração dos inteiros positivos contém progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes.

Definição 2.8. Dada uma $k-1$-PA $\{a, a+d, \ldots, a+(k-2)d\}$, dizemos que $a + (k-1)d$ é o *foco* desta PA. Dizemos que s tais $(k-1)$-PAs são *cor-focadas* se são monocromáticas, cada $(k-1)$-PA tem uma cor diferente, e todas as $(k-1)$-PAs têm mesmo foco.

Afirmação 2.9. Para cada $1 \leq s \leq r$, existe $n = n(s)$ tal que toda r-coloração de $\{1, 2, \ldots, n\}$ contém uma $k - PA$ monocromática, ou s progressões aritméticas de comprimento $k - 1$ cor-focadas.

Exercício 2.10. Mostre que se colorirmos o plano com 2 cores, existem quatro pontos de mesma cor que são vértices de um quadrado. Podemos garantir o mesmo para mais cores?

3 O teorema de Rado

Definição 3.11. Dizemos que uma equação linear E é partição regular se para todo $r \in \mathbb{N}$, toda r-coloração dos inteiros possui uma solução monocromática para E.

Teorema 3.12. (Rado, 1933) Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. A equação

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$$

é partição regular se, e somente se existe um subconjunto não vazio dos c_i cuja soma é 0.

Exemplo 3.13. A equação $x + y - z = 0$ é partição regular, pois $c_2 + c_3 = 1 - 1 = 0$ e a equação $x + y - 2z = 0$ é partição regular, pois $c_1 + c_2 + c_3 = 1 + 1 - 2 = 0$.

Teorema 3.14. Para todos os inteiros positivos k, r e s, existe um inteiro $n(k, r, s)$ tal que, para qualquer r-coloração de $\{1, 2, \ldots, n(k, r, s)\}$, existem inteiros a e d tais que o conjunto $\{a, a + d, \ldots, a + kd\} \cup \{sd\}$ é monocromático.

Exercício 3.15. Mostre que para cada $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{N}$ que toda r-coloração dos inteiros possui uma solução monocromática da equação $x + \lambda y = z$.

4 O teorema de Hales-Jewett

Definição 4.16. Uma *reta combinatória* em $\{1, 2, \ldots, k\}^n$ é um conjunto $L = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\}$ de tamanho k, com cada $x^{(i)} \in \{1, 2, \ldots, k\}^n$, tal que, para cada coordenada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

(a) $x_j^{(1)} = \ldots = x_j^{(k)}$; ou

(b) $x_j^{(i)} = i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Exemplo 4.17. $\{(1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 1), (3, 2, 3, 1)\}$ é uma reta combinatória em $\{1, 2, 3\}^4$.

Teorema 4.18. (Hales-Jewett, 1963) Sejam $k, r \in \mathbb{N}$. Se n é suficientemente grande, então toda r-coloração de $\{1, 2, \ldots, k\}^n$ contém uma reta combinatória monocromática.

Exercício 4.19. Mostre que o teorema de Hales-Jewett implica no teorema de Van der Warden.

5 Os teoremas de Roth e Szemerédi

Questão 5.20. (Erdös-Turán, 1936) Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto de densidade superior positiva, isto é, tal que existe $\delta > 0$ para o qual $|A \cap \{1, 2, \dots, n\}| \geq \delta n$ para infinitos inteiros positivos n. É verdade que A contém uma k-PA?

Teorema 5.21. (Roth, 1952) Para todo ϵ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq m_0$ e $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ com $|A| \geq \epsilon n$, então A contém uma 3-PA.

Teorema 5.22. (Szemerédi, 1975) Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todo conjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ de temanho $|A| \geq \delta n$ contém uma progressão aritmética de comprimento k.

6 Referências

[1] Combinatória - Colóquio Brasileiro de Matemática 2021. Disponível em:

https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM02-eBook.pdf

[2] https://www.wwu.edu/faculty/sarkara/Rado.pdf