Questões Tensas, Soluções Densas

26ª Semana Olímpica – Rio de Janeiro, RJ

Prof. Davi Lopes – Nível U

1. Resumo Teórico

1.1. Complexidade Assintótica

Notação "Big-O": Dadas duas funções $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, dizemos que $f = O(g)$ se existem duas constantes C_1 e C_2 tais que $C_1 f(n) \leq g(n) \leq C_2 f(n)$, para todo inteiro positivo n.

Notação "Little-o": Dadas duas funções $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, dizemos que $f = o(g)$ se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

Notação Assintótica: Dadas duas funções $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, dizemos que $f \approx g$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Note que isso implica $f(n) = g(n) + o\big(g(n)\big)$.

1.2. Algumas Fórmulas Assintóticas Interessantes

Teorema do Número Primo: Para cada inteiro positivo n, seja $\pi(n)$ o número de primos menores ou iguais a n, e p_n o $n-$ésimo número primo. Então:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)}; p_n \approx n \cdot \ln(n)$$

Teorema de Dirichlet: Para inteiros positivos n, a, d, com $mdc(a, d) = 1$, seja $\pi_d(n, a)$ o número de primos $p \leq n$ tais que $p \equiv a \ (mod\ d)$. Então:

$$\pi_d(n, a) \approx \frac{n}{\varphi(d) \cdot \ln(n)}$$

Em particular, existem infinitos primos p tais que $p \equiv a \ (mod\ d)$.

Fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Número de Partições: $p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$

Estimativa do Número de Ramsey Bipartido: Se $b(m, n)$ é o menor inteiro positivo r tal que toda pintura de duas cores das arestas um $K_{r,r}$ contém um $K_{m,m}$ de uma cor ou um $K_{n,n}$ de outra cor, então existem constantes A, B tais que:

$$A\left(\frac{n}{\log n}\right)^{(m+1)/2} + o\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{(m+1)/2}\right) \leq b(m, n) \leq B\left(\frac{n}{\log n}\right)^m + o\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^m\right)$$

Número de Representações Como Soma de 5 Cubos: se $R_5(n)$ é o número de maneiras de escrever n como soma de 5 cubos, então existe $C > 0$ tal que:

$$\sum_{n\geq N} R_5(n)^3 = CN^3 + O\left(N^{\frac{35}{12}+\varepsilon}\right)$$

1.3. Densidade Sobre ℕ

Densidade sobre* ℕ*: Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos:

- Densidade superior sobre ℕ:

$$d^+(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n}$$

- Densidade inferior sobre ℕ:

$$d^-(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n}$$

- Densidade sobre ℕ (se existir):

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n}$$

Note que $d(A)$ existe se, e somente se, $d^-(A) = d^+(A)$, e neste caso:

$$d(A) = d^+(A) = d^-(A)$$

1.4. Densidade Sobre ℝ

Conjuntos Densos: Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos numéricos. Dizemos que A é denso em B (ou que A é denso sobre B) se, para todo $b \in B$, existe uma sequência $a_1, a_2, \dots$ de elementos em A tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

Teorema de Kronecker: Para todo $\alpha \notin \mathbb{Q}$, o conjunto $A = \{m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em ℝ. Em particular, o conjunto $A' = \left\{\{n\alpha\} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ é denso em [0,1].

Lemas Adicionais:

Lema 1: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de reais positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Então, o conjunto $A = \{ma_n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0, +\infty)$.

Lema 2: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de reais positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Então, o conjunto $A = \left\{\frac{a_m}{a_n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$ é denso em $[0, +\infty)$.

Lema 3: Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de reais positivos tais que $(b_{n+1} - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Então, o conjunto

$$A = \{a_m . b_n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

É denso em $[0, +\infty)$

2. Exercícios Básicos

Exercício 1: Prove que os seguintes conjuntos são densos em $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
(b) $B = \{a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$
(c) $C = \{P(a) \mid a \in \mathbb{Q}\}$, onde $P \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio de grau ímpar
(d) $C = \{m.\operatorname{sen}(n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$
(e) $D = \left\{\frac{m}{2^n} - \frac{n}{2^m} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercício 2: Seja $(a_n)_{n\geq 1} \subset (1, +\infty)$ uma sequência convergente para 1, tal que $\lim_{n\to\infty}(a_1a_2 \ldots a_n) = +\infty$. Prove que o conjunto $A = \{a_m a_{m+1} \ldots a_n \mid m < n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0, +\infty)$.

Exercício 3: Prove que existem infinitos pares de inteiros positivos $m > n$ tais que:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}} \in \left(\sqrt{2022} - \frac{1}{2022}, \sqrt{2022} + \frac{1}{2022}\right)$$

Exercício 4: Seja t um inteiro positivo fixo. Prove que o conjunto

$$A_t = \{\{n\} + \{n+1\} + \cdots + \{n+t\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

É denso em $[0, t+1]$.

Exercício 5: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para todos os números reais x, $f(x) = f(x + \sqrt{3}) = f(x + \sqrt{7})$. Prove que f é constante.

Exercício 6: (a) Seja n um inteiro positivo. Prove que $\log n$ é racional se, e somente se, n é uma potência de 10.

(b) Prove que existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que 2^n começa com 2022 algarismos 3 em sua representação decimal.

Exercício 7 (Kronecker em $\mathbb{R}^n$): Seja $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ fixo e seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ (isto é, se $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ são tais que $x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$, então $x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$). Prove que o conjunto:

$$X = \{k\alpha + m_1e_1 + m_2e_2 + \cdots + m_ne_n \mid k, m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}$$

É denso em $\mathbb{R}^n$, ou seja, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, existem $x_1, x_2, \ldots \in X$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Exercício 8: Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que 2^n e 3^n começam com a mesma sequência $M = (a_1a_2 \ldots a_k)$ de dígitos na base decimal.

Exercício 9: (a) Considere A o conjunto formado pelos termos de uma progressão aritmética de razão $r \in \mathbb{N}$ cujos elementos são números inteiros. Prove que $d(A) = 1/r$.

(b) Suponha que o conjunto dos inteiros não negativos é particionado pelas k progressões aritméticas $A_1 = \{a_1n + b_1 | n \geq 0\}, A_2 = \{a_2n + b_2 | n \geq 0\}, \ldots, A_k = \{a_kn + b_k | n \geq 0\}$. Prove que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$.

Exercício 10: Para cada inteiro não negativo n, sejam:

$$I_n = [2^n, 2^{n+1})$$

$$O_n = I_n \cap (2\mathbb{N} + 1) \text{ (números ímpares em } I_n)$$

$$E_n = I_n \cap (2\mathbb{N}) \text{ (números pares em } I_n)$$

Defina ainda os seguintes conjuntos:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{2n}\, ; B = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{2n}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{m}} O_{2n+1}\right)$$

(a) Prove que $d^-(A) = \frac{1}{3}$ e $d^+(A) = \frac{2}{3}$.

(b) Prove que $d(B) = d(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$, mas que $d^-\big(B \cap (2\mathbb{N})\big) = \frac{1}{6}$ e $d^+\big(B \cap (2\mathbb{N})\big) = \frac{1}{3}$.

(c) Ache um subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que, se $C = \bigcup_{s\in S} I_s$, então $d^-(C) = 0$ e $d^+(C) = 1$.

Exercício 11: Prove que:

(a) $1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \approx \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1; \alpha \in \mathbb{R})$

(b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln(n)$

(c) $\sum_{p\ primo} \frac{1}{p} \approx \ln(\ln(n))$

Exercício 12: Para cada inteiro positivo n, seja $d(n)$ a quantidade de divisores positivos de n. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, $d(n) = o(n^\varepsilon)$.

Exercício 13: Seja d um inteiro positivo fixo. Prove que:

$$\text{mmc}(n, n+1, \ldots, n+d) = O(n^{d+1})$$

Exercício 14: (a) Seja A o conjunto dos inteiros positivos livres de quadrados, isto é, o conjunto dos naturais que não são divisíveis pelo quadrado de algum primo. Prove que:

$$d^-(A) > \frac{1}{2}$$

(b) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que n e $n+1$ são livres de quadrados.

Exercício 15: Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros positivos. Se:

$$A = \{a_1, a_2, \dots \mid a_1 < a_2 < \cdots \ e\ P(x) = a_i, para\ algum\ x \in \mathbb{Z}_+^*\}$$

$$P = \{p \mid p\ é\ primo\ e\ p \in A\}; A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}; P_n = \{p \mid p \in P\ e\ p < a_n\}$$

Prove que a densidade de P sobre A é sempre 0, isto é:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|P_n \cap A_n|}{n} = 0$$

3. Problemas Propostos

Problema 1 (OBM/1992): Prove que existe um natural n tal que a expansão decimal de n^{1992} começa com 1992 algarismos iguais a 1.

Problema 2 (OBMU/2001): Seja $\varepsilon > 0$ um real dado. Com centro em todos os pontos do plano com coordenadas inteiras, traça-se um círculo de raio ε. Prove que toda reta passando pela origem intercepta uma infinidade desses círculos.

Problema 3 (OBMU/2022 - Adaptado): Sejam $E, F \subset \mathbb{N}$ tais que $d^-(E).d^-(F) > \frac{1}{4}$. Prove que para qualquer $N \in \mathbb{N}$, existe $m \in E$, $n \in F$ tais que $m \equiv n\ (mod\ N)$.

Problema 4 (Romania IMO TST/2003): Considere a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \lfloor n\sqrt{2003} \rfloor$, para $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para quaisquer inteiros positivos m e p, a sequência contém m elementos em uma progressão geométrica de razão maior que p.

Problema 5: Seja $r \in (0,1)$ um número real. Seja $S(r)$ o conjunto dos inteiros positivos n para os quais o intervalo $(nr, (n+1)r)$ contém exatamente um inteiro. Prove que r é irracional se, e somente se, para todo inteiro positivo M, existe um sistema completo de resíduos módulo M contido em $S(r)$.

Problema 6 (OBM/2020): Para a inteiro positivo, defina $F_1^{(a)} = 1$, $F_2^{(a)} = a$ e, para cada $n > 2$, $F_n^{(a)} = F_{n-1}^{(a)} + F_{(n-2)}^{(a)}$. Um inteiro positivo é *fibonático* quando é igual a $F_n^{(a)}$ para algum a inteiro positivo e algum $n > 3$. Prove que existem infinitos números inteiros que não são fibonáticos.

Problema 7 (Rioplatense): Sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ primos distintos. Considere todos os inteiros positivos que utilizam apenas esses primos (não necessariamente todos) em sua fatoração em números primos, e coloque-os em ordem crescente, formando uma sequência infinita e estritamente crescente $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Demonstre que, para cada natural c, existe um natural n tal que $a_{n+1} - a_n > c$.

Problema 8 (China Southeast/2020): Arranje todos os inteiros positivos livres de quadrados em ordem ascendente, obtendo $a_1 < a_2 < \cdots$. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $a_{n+1} - a_n = 2020$.

Problema 9 (Ukraine TST/2007): Prove que existem infinitos inteiros positivos n para os quais todos os divisores primos de $n^2 + n + 1$ não são maiores que $\sqrt{n}$.

Problema 10 (USAMO/1995): Suponha que $q_0, q_1, q_2, \dots$ é uma sequência infinita de inteiros satisfazendo as seguintes condições:

(i) $m - n$ divide $q_m - q_n$, para todos $m > n \geq 0$ inteiros;
(ii) Existe um polinômio P tal que $|q_n| < P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prove que existe um polinômio Q tal que $q_n = Q(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 11 (USAMO 2014 – Generalização): Prove que existe uma constante $c > 0$ com a seguinte propriedade: se $a, b, n \in \mathbb{N}$ são tais que $mdc(a + i, b + j) > 1$, para todos $i, j \in \{0,1, \dots, n\}$, então $\min\{a, b\} > (cn)^n$.

Problema 12 (Iran/2001): Determine se existe uma sequência $a_1, a_2, a_3, \dots$ de números reais não negativos tais que:

$$a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots = \frac{1}{n}$$

Para todo inteiro positivo n.

Problema 13 (Canadá/2020): Seja $S = \{4,8,9,16, \dots\}$ o conjunto das potências perfeitas. Prove que se arranjarmos os elementos de S em ordem crescente, obtendo $a_1 < a_2 < \cdots$, então existem infinitos inteiros positivos n para os quais $9999|a_{n+1} - a_n$.

Problema 14 (IMO Shortlist/2015): Considere uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com as seguintes propriedades:

(i) Se $m, n \in \mathbb{N}$, então $\frac{f^{(n)}(m) - m}{n} \in \mathbb{N}$ ($f^{(n)}$ é a iterada n vezes);
(ii) O conjunto $\mathbb{N} \backslash \{f(n): n \in \mathbb{N}\}$ é finito.

Prove que a sequência $f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3, \dots$ é periódica.

Problema 15 (China TST/2018): Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo. Dizemos que um inteiro positivo n é bom se dentre os números $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, ao menos $0{,}99n$ deles são divisíveis por k. Mostre que existe um inteiro positivo N tal que dentre $1,2, \dots, N$, existem ao menos $0{,}99N$ deles que são bons.

Problema 16 (Rioplatense/2022 – Adaptada): Um matemático está se divertindo com números naturais e ele decide fazer a seguinte brincadeira: inicialmente, ele escreve um inteiro positivo maior que 1 numa lousa e, a cada instante ele o divide pelo seu menor divisor primo, e substitui o número na lousa pelo que foi escrito. Ele repete o procedimento até obter o número 1. Se em algum momento aparecer um cubo perfeito maior que 1, o matemático classifica o número escrito originalmente como sendo cuboso; caso contrário, ele classifica o número como não cuboso. Por exemplo, o número 864 é cuboso, pois na sequência de números obtidos, temos:

$$864 \to 432 \to 216 \to 108 \to 54 \to 27 \to 9 \to 3 \to 1$$

e o cubo perfeito $216 = 6^3$ apareceu. 8 também é cuboso, pois ele já é um cubo perfeito maior que 1. Já 2022 não é cuboso, pois na sequência:

$$2022 \to 1011 \to 337 \to 1$$

não há nenhum cubo perfeito maior que 1. Observe também que 1 não é cuboso.

Prove que a densidade dos números cubosos sobre $\mathbb{N}$ é 0.

Problema 17: Prove que, para todo inteiro positivo n, existe uma sequência de n inteiros consecutivos que não possuem o mesmo número de divisores.

Problema 18: Prove que existe um real $c > 0$ com a seguinte propriedade: entre quaisquer $n \geq 3$ números inteiros positivos distintos, existem três cujo mmc é pelo menos $c.n^{2,99}$.

Problema 19 (Vingança/2020): Seja n um inteiro positivo e A um conjunto de inteiros tal que o conjunto $A + A = \{a + b \mid a, b \in A\}$ contém $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$. Prove que existe um inteiro positivo n tal que se $n \geq N$, então $|A| > n^{0,6666}$

Problema 20 (Vingança/2014): Seja $a > 1$ um inteiro positivo e $f \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio com coeficiente líder positivo. Seja S o conjunto dos inteiros n tais que $n | a^{f(n)} - 1$. Prove que S tem densidade 0 sobre $\mathbb{N}$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|S\cap\{1,2,\ldots,n\}|}{n} = 0$.