26ª Semana Olímpica – Rio de Janeiro – Janeiro de 2022
Funções Geradoras – Nível Universitário

Rogério Ricardo Steffenon

E-mail: steffenonenator@gmail.com

Resumo

Nesta aula serão abordados problemas de contagem utilizando o método das **funções geradoras**.

Exemplo: Quantas soluções inteiras possui a equação

$x_1 + x_2 + x_3 = n$, onde $x_1 \in \{3,4,5\}, x_2 \in \{1,2,3,4\}, x_3 \in \{2,4\}$ e $n \in \{6,7,8,9,10,11,12,13\}$?

Solução. Consideremos três polinômios, um para cada variável:

$x_1 \in \{3,4,5\} \Longrightarrow p_1(x) = x^3 + x^4 + x^5$,

$x_2 \in \{1,2,3,4\} \Longrightarrow p_2(x) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4$,

$x_3 \in \{2,4\} \Longrightarrow p_3(x) = x^2 + x^4$.

Agora considere o polinômio

$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) = (x^3+x^4+x^5)(x^1+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^4) = x^{13}+2x^{12}+4x^{11}+5x^{10}+5x^9+4x^8+2x^7+x^6$.

O coeficiente de x^{10} no polinômio p é $a_{10} = 5$, que corresponde ao número de soluções inteiras da equação

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_1 \in \{3,4,5\}, x_2 \in \{1,2,3,4\}, x_3 \in \{2,4\}$.

Podemos visualizar as soluções se considerarmos os polinômios

$x_1 \in \{3,4,5\} \Longrightarrow P_1(x) = a^3x^3 + a^4x^4 + a^5x^5$,

$x_2 \in \{1,2,3,4\} \Longrightarrow P_2(x) = bx + b^2x^2 + b^3x^3 + b^4x^4$,

$x_3 \in \{2,4\} \Longrightarrow P_3(x) = c^2x^2 + c^4x^4$.

$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) = a^5b^4c^4x^{13} + \cdots + (a^5b^3c^2 + a^5bc^4 + a^4b^4c^2 + a^4b^2c^4 + a^3b^3c^4)x^{10} + \cdots + a^3bc^2x^6$.

Observe que no coeficiente de x^{10} aparecem as cinco soluções da equação

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_1 \in \{3,4,5\}, x_2 \in \{1,2,3,4\}, x_3 \in \{2,4\}$.

x_1	x_2	x_3
5	3	2
5	1	4
4	4	2
4	2	4
3	3	4

Séries de Potências

Antes de definirmos funções geradoras lembramos algumas séries de potências estudadas no Cálculo. Aqui trabalhamos com séries formais e a princípio não interessa para quais valores de x vale cada uma das igualdades abaixo, mesmo assim indicamos.

Série Geométrica: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$ se $|x| < 1.$

Série Geométrica Generalizada: $\dfrac{1}{1-ax} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n = 1 + ax + (ax)^2 + \cdots,$ se $|ax| < 1,$ onde $a \neq 0.$

Função Exponencial: $e^{ax} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função Cosseno Hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função Seno Hiperbólico: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

Série Binomial: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ e $|\beta x| < 1$, então

$$(1+\beta x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \beta^n x^n, \text{ onde } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Definição: Se a_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, é o número de soluções de um problema de contagem, a **função geradora ordinária** para este problema é a série de potências formal

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots$$

Teorema: Se $f(x)$ e $g(x)$ são as funções geradoras das sequências $(a_n)_{n\geqslant 0}$ e $(b_n)_{n\geqslant 0}$, respectivamente, então:

(i) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ é a função geradora da sequência $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\geqslant 0}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)g(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$

(iii) A função geradora para a sequência $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)_{n\geqslant 0}$ é igual a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \cdot f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)f(x) = \frac{1}{1-x} f(x).$$

(iv) A função geradora para $(na_n)_{n\geqslant 0}$ é igual a $xf'(x)$, onde $f'(x)$ é a derivada de f em relação a x.

Sequência de Fibonacci

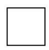
No exemplo abaixo resolveremos uma equação de recorrência de segunda ordem usando séries de potências.

A sequência abaixo tem lei de formação ligeiramente diferente da sequência de Fibonacci:

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, se $n \geqslant 2$.

Exemplo: Dispomos de uma *grande* quantidade de blocos coloridos nas cores branca e preta. Os blocos brancos são quadrados de lado 1 cm, e os pretos são retangulares e medem 1 cm $\times$ 2 cm. Quantas filas de altura 1 cm e comprimento n cm podem ser feitas?

Solução. Seja a_n a quantidade de maneiras de formar uma fila de comprimento n centímetros. Note que

$a_1 = 1$: 

$a_2 = 2$: 

Agora vamos analisar o caso geral a_{n+1} para $n \geqslant 2$. Para a_{n+1} temos dois tipos de soluções: aquelas em que o último bloco é branco, e aquelas em que o último é preto.

Caso 1: Se o último bloco é branco, então devemos completar os n centímetros iniciais, e isso pode ser feito de a_n modos.

Caso 2: Se o último bloco é preto, então devemos completar os $n-1$ centímetros iniciais e isso pode ser feito de a_{n-1} modos.

Considerando ambos os casos acima, temos que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 2$.

Além disso, podemos definir $a_0 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$.

Analisaremos a sequência definida por $a_0 = 1, a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geqslant 2$.

Iremos encontrar a função geradora ordinária f da sequência $(a_n)_{n \geqslant 0}$ e uma expressão para o termo geral a_n.

Escreveremos apenas f ao invés de $f(x)$.

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow f = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} [a_{n-1} + a_{n-2}]\, x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n$$

$$f = 1 + x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1 + x + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + x + x(f-1) + x^2 f$$

Assim segue que $f = 1 + x + x(f-1) + x^2 f \Rightarrow (1 - x - x^2) f = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$.

A equação $1 - x - x^2 = 0$ tem como soluções $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Note que $\alpha + \beta = 1, \alpha \cdot \beta = -1, \alpha - \beta = \sqrt{5}$ e assim $1 - x - x^2 = 1 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$.

Além disso, $f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\dfrac{\alpha}{1 - \alpha x} - \dfrac{\beta}{1 - \beta x} \right]$.

Agora podemos usar a série geométrica para obter a série de potências de f:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha x} - \frac{\beta}{1 - \beta x} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\, (\alpha x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \beta\, (\beta x)^n \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) x^n$$

Portanto $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$ para todo $n \geqslant 0$, onde $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Permutações Caóticas

Definição: Uma permutação de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é dita **caótica** quando nenhum a_i se encontra na i-ésima posição.

Exemplo: As permutações $2341, 3412$ são caóticas de $1, 2, 3, 4$, mas 2314 não é (4 está no seu lugar primitivo).

Para $n \geqslant 1$, seja D_n o número de permutações caóticas de n elementos. Temos que $D_1 = 0, D_2 = 1$.

Para $n = 3$ temos duas permutações caóticas: 231 e 312 e assim $D_3 = 2$.

Para $n = 4$ temos nove permutações caóticas: $2341, 3421, 4321, 3412, 3142, 4312, 2413, 4123$ e 2143 e assim $D_4 = 9$.

Agora deduziremos uma fórmula recursiva para D_n.

Para $1 \leqslant k \leqslant n-1$ dividimos as permutações caóticas com $a_n = k$ em dois subconjuntos:

• Aquelas em $a_k = n$ e assim os demais $n-2$ elementos podem ser colocados de D_{n-2} maneiras.

• Os elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\} - \{k\}$ não ocupam o seu lugar primitivo e n não ocupa a k-ésima posição. Isso pode ser feito de D_{n-1} modos.

Assim segue que $D_1 = 0, D_2 = 1$ e $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$ para $n \geqslant 3$.

A equação acima pode ser reescrita na forma $D_n - nD_{n-1} = (-1)[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$.

Definindo $d_n = D_n - nD_{n-1}$ segue que $d_n = (-1)d_{n-1}$ é uma progressão geométrica com $d_2 = D_2 - 2 \cdot D_1 = 1$.

Logo $d_n = (-1)^n$ e então a equação de recorrência fica $D_1 = 0$ e $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, para $n \geqslant 2$.

Podemos definir D_0 fazendo $n = 1$ na recorrência e assim $D_1 = 1 \cdot D_0 + (-1)^1$, ou seja, $D_0 = 1$.

Dividindo por $n!$ temos que $\dfrac{D_n}{n!} = n\dfrac{D_{n-1}}{n!} + \dfrac{(-1)^n}{n!} = \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Seja $p_n = \dfrac{D_n}{n!}$ e assim a equação fica $p_n = p_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n!}$, para $n \geqslant 1$.

Multiplicando por x^n e somando temos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \text{ e assim segue que}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n + e^{-x} - 1 \quad (1)$$

Se $p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ é a função geradora da sequência p_n, então temos que a partir de (1) que

$g(x) - p_0 = xg(x) + e^{-x} - 1$. Como $p_0 = \dfrac{D_0}{0!} = 1$, segue que $g(x) = xg(x) + e^{-x}$.

Logo $g(x) = \dfrac{1}{1-x}\, e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) x^n$ e assim $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$

Portanto $D_n = n! p_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Combinações Completas

Proposição: Sejam m, n números inteiros positivos. O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ é igual a

$$\binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}.$$

Prova. Este é o número de maneiras de escolher n objetos dentre m objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até n vezes. Neste caso precisamos fazer um percurso num diagrama de quadras e ruas de $O = (0,0)$ até $P = (n-1, m)$, em que subimos m quadras e nos deslocamos $n-1$ vezes para a direita, que é equivalente a contar os anagramas da palavra $\underbrace{S \ldots S}_{m}\underbrace{D \ldots D}_{n-1}$ e isso é igual a $\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}$. $\square$

Abaixo veremos uma forma de provar o resultado anterior usando a série geométrica.

No exemplo abaixo usaremos as notações $f^{(n)}(x) = f^{(n)}$ é a derivada de ordem n de f e $[f(x)]^n = f^n$.

Exemplo: Se $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, então $f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$, para todo $n \geqslant 0$.

Podemos provar que $(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k.$

Portanto o coeficiente de x^m em $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ é $\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = \dbinom{m+n-1}{m}$. $\square$

Exemplo: Utilizando funções geradoras vamos encontrar a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$.

Solução. Observe que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ se, e somente se, $x^{x_1} x^{x_2} \cdots x^{x_n} = x^m$. Logo a quantidade de soluções da equação é igual o número de maneiras de obter a parcela x^m em

$\underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) \cdots (1 + x + x^2 + \cdots)}_{n}.$

Pelo exemplo anterior, o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ é igual a

$$\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = \binom{m+n-1}{m}. \ \square$$

Sequência de Catalan

Exemplo: Seja n um inteiro positivo. Uma partícula, estando no ponto (x, y), pode se movimentar de dois modos:

$S : (x, y) \nearrow (x+1, y+1)$ e $D : (x, y) \searrow (x+1, y-1)$.

Além disso, a partícula **não** pode ficar abaixo do eixo dos x.

Quantos são os trajetos possíveis da partícula de $(0,0)$ até $(2n, 0)$ usando os movimentos S e D?

Proposição. Seja C_n a quantidade de caminhos possíveis no problema acima. Então temos que:

(i) $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, para todo $n \geqslant 0$. C_n é denominada **sequência de Catalan**.

(ii) A sequência de Catalan C_n satisfaz a relação de recorrência

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \text{ para todo } n \geqslant 0.$$

(iii) A função geradora para a sequência de Catalan C_n é

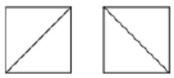
$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}}.$$

Uma situação semelhante cuja solução envolve a sequência de Catalan é dada no exemplo abaixo.

Divisão de um Polígono Convexo em Triângulos

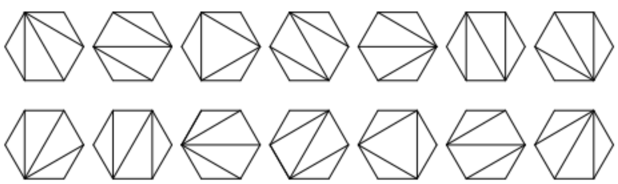
Exemplo: Para cada inteiro $n \geqslant 3$, pretendemos determinar de quantas maneiras é possível dividir um polígono convexo de n lados em triângulos, traçando apenas diagonais que não se intersectem no interior do polígono. A posição do polígono é fixada, de modo que todas as partições diferentes com respeito à posição considerada são contabilizadas mesmo que algumas delas possam resultar em configurações iguais mediante rotações. Podemos considerar polígonos regulares. Nas figuras abaixo temos todas as configurações para $n \in \{4, 5, 6, 7\}$.

$n = 4$:



$n = 5$:

$n = 6$:



Solução. Denotando por P_n o número de maneiras de dividir um polígono de n lados segundo as regras acima, temos que $P_3 = 1, P_4 = 2$ e convencionando $P_2 = 1$ temos que

$$P_2 = 1 \text{ e } P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k P_{n+1-k}, \text{ se } n \geqslant 3.$$

Lembre que se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, então $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.

Se convencionarmos que $P_0 = P_1 = 0$, então temos que

$$P_2 = 1 \text{ e } P_n = \sum_{k=0}^{n+1} P_k P_{n+1-k}, \text{ se } n \geqslant 3.$$

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n$, então a soma acima é a expressão do coeficiente de x^{n+1} da função $f^2(x) = f(x)f(x)$.

Então temos a recorrência $P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1$ e $P_n = \sum_{k=0}^{n+1} P_k P_{n+1-k}$, se $n \geqslant 3$.

Multiplicando a recorrência acima por x^n e somando para $n \geqslant 3$ obtemos

$$\sum_{n=3}^{+\infty} P_n x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} P_k P_{n+1-k} \right) x^n.$$

Assim segue que

$$f(x) - P_0 - P_1 x - P_2 x^2 = \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} P_k P_{n+1-k} \right) x^{n+1}.$$

Logo $f(x) - x^2 = \dfrac{f^2(x)}{x}$ e a função geradora da sequência P_n satisfaz a equação $f^2(x) - xf(x) + x^3 = 0$.

As soluções desta equação são $f(x) = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2} = \dfrac{x}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right)$.

Agora precisamos verificar qual raiz escolher.

Temos que $f'(0) = P_1 = 0$ e a única das funções acima que satisfaz essa condição é $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$.

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right) = x^2\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} C_{n-2} x^n.$$

Como $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} P_n x^n$ e assim $P_n = C_{n-2}$.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n = C_{n-2}$	1	2	5	14	42	132	429	1430

Sequência de Motzkin

Exemplo: Seja n um inteiro positivo. Uma partícula, estando no ponto (x, y), pode se movimentar de três modos:

$R : (x, y) \to (x+1, y), S : (x, y) \nearrow (x+1, y+1)$ e $D : (x, y) \searrow (x+1, y-1)$.

Além disso, a partícula **não** pode ficar abaixo do eixo dos x.

Quantos são os trajetos possíveis da partícula de $(0, 0)$ até $(n, 0)$ usando os movimentos R, S e D?

Se M_n é a quantidade de trajetos possíveis, denominada sequência de Motzkin.

Então $M_0 = M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 4, M_4 = 9, M_5 = 21, M_6 = 51, M_7 = 127, \ldots$ e

$M_{n+1} = M_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-1-k} = \dfrac{2n+3}{n+3} M_n + \dfrac{3n}{n+3} M_{n-1}$

A função geradora da sequência de Motzkin $\qquad \dfrac{1 - x - \sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} C_k\right) x^n.$

Além disso, a sequência de Catalan pode ser obtida a partir da sequência de Motzkin

$$C_0 = 1 \text{ e } C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} M_k, \text{ se } n \geqslant 0.$$

Função Geradora Exponencial

Agora veremos uma situação em que a ordem é importante.

Exemplo: Quantas sequências com n letras ($n \in \{6,7,8,9,10,11,12,13\}$), formadas pelas letras a, b, c, onde a letra a aparece 3, 4 ou 5 vezes, a letra b aparece 1, 2, 3 ou 4 vezes e a letra c aparece 2 ou 4 vezes?

Solução. Vamos considerar o caso $n = 10$.

No termo $a^5b^3c^2x^{10}$ que surge do produto $(a^5x^5)(b^3x^3)(c^2x^2)$ devemos obter o fator $\dfrac{10!}{5!3!2!}$.

Se quisermos a quantidade de soluções para $n = 10$, o coeficiente de x^{10} deve ser

$$\frac{10!}{5!3!2!} + \frac{10!}{5!1!4!} + \frac{10!}{4!4!2!} + \frac{10!}{4!2!4!} + \frac{10!}{3!3!4!}.$$

Alteramos os polinômios que controlam a presença de cada letra introduzindo no coeficiente de x^n o fator $\dfrac{1}{n!}$.

Assim segue que

$$\left(\frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^4}{4!}x^4 + \frac{a^5}{5!}x^5\right)\left(\frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2 + \frac{b^3}{3!}x^3 + \frac{b^4}{4!}x^4\right)\left(\frac{c^2}{2!}x^2 + \frac{c^4}{4!}x^4\right) =$$

$$\frac{a^5b^4c^4}{5!4!4!}x^{13} + \left(\frac{a^5b^3c^4}{5!3!4!} + \frac{a^4b^4c^4}{4!4!4!}\right)x^{12} + (\cdots)\,x^{11} + \left(\frac{a^5b^3c^2}{5!3!2!} + \frac{a^5bc^4}{5!1!4!} + \frac{a^4b^4c^2}{4!4!2!} + \frac{a^4b^2c^4}{4!2!4!} + \frac{a^3b^3c^4}{3!3!4!}\right)x^{10} + \cdots + \frac{a^3bc^2}{3!1!2!}x^6$$

Agora o coeficiente de x^{10} é $\dfrac{a^5b^3c^2}{5!3!2!} + \dfrac{a^5bc^4}{5!1!4!} + \dfrac{a^4b^4c^2}{4!4!2!} + \dfrac{a^4b^2c^4}{4!2!4!} + \dfrac{a^3b^3c^4}{3!3!4!}$ que ainda não é o que desejamos!

Se multiplicarmos e dividirmos esta expressão por 10! teremos:

$$\left(\frac{10!}{5!3!2!}a^5b^3c^2 + \frac{10!}{5!1!4!}a^5bc^4 + \frac{10!}{4!4!2!}a^4b^4c^2 + \frac{10!}{4!2!4!}a^4b^2c^4 + \frac{10!}{3!3!4!}a^4b^2c^4\right)\frac{1}{10!}.$$

Se fizermos $a = b = c = 1$, o número procurado será o coeficiente de $\dfrac{x^{10}}{10!}$:

$$\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) =$$

$$\frac{13!}{5!4!4!}\frac{x^{13}}{13!} + \left(\frac{12!}{5!3!4!} + \frac{12!}{4!4!4!}\right)\frac{x^{12}}{12!} + (\cdots)\frac{x^{11}}{11!} + \left(\frac{10!}{5!3!2!} + \frac{10!}{5!1!4!} + \frac{10!}{4!4!2!} + \frac{10!}{4!2!4!} + \frac{10!}{3!3!4!}\right)\frac{x^{10}}{10!} + \cdots + \frac{6!}{3!1!2!}\frac{x^6}{6!}$$

Logo a quantidade de sequências com 10 letras formadas pelas letras a, b, c, onde a letra a aparece 3, 4 ou 5 vezes, a letra b aparece 1, 2, 3 ou 4 vezes e a letra c aparece 2 ou 4 vezes é igual a $\dfrac{10!}{5!3!2!} + \dfrac{10!}{5!1!4!} + \dfrac{10!}{4!4!2!} + \dfrac{10!}{4!2!4!} + \dfrac{10!}{3!3!4!}$.

Definição: A série de potências $a_0 + a_1\dfrac{x}{1!} + a_2\dfrac{x^2}{2!} + a_3\dfrac{a_3}{3!} + \cdots + a_n\dfrac{x^n}{n!} + \cdots$ é função geradora exponencial da sequência $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Usamos a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem é irrelevante usamos a função geradora ordinária.

Exemplo: Seja n um inteiro positivo. Determine a quantidade de números inteiros positivos N satisfazendo as seguintes condições:

(i) N possui n algarismos do conjunto $\{1, 2, 3, 5, 8\}$.

(ii) N tem uma quantidade par de algarismos 2 e uma quantidade par de algarismos 8.

(ii) N tem uma quantidade ímpar de algarismos 3 e uma quantidade ímpar de algarismos 5.

Contando Funções Sobrejetivas

Exemplo: De quantas maneiras podemos acomodar 30 alunos em 4 turmas diferentes sem que nenhuma turma fique vazia?

Nenhuma turma poderá ficar com mais de 27 alunos, pois nesse caso teríamos pelo menos uma turma vazia.

Como as turmas são diferentes e a ordem dos alunos nas turmas não importa usamos a função geradora exponencial.

Para este problema podemos usar $f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{27}}{27!}\right)^4$ e a resposta é o coeficiente de $\frac{x^{30}}{30!}$ nesta expressão.

Note que é o mesmo que tomar o coeficiente de $\frac{x^{30}}{30!}$ na expressão $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{27}}{27!} + \cdots\right)^4 = (e^x - 1)^4$, pois as potências adicionadas não afetam o coeficiente de $\frac{x^{30}}{30!}$.

Mas $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$ e o coeficiente de $\frac{x^{30}}{30!}$ nessa expressão é $4^{30} - 4 \cdot 3^{30} + 6 \cdot 2^{30} - 4$.

Teorema: Sejam m, n inteiros positivos tais que $m \geqslant n$. Se A e B são conjuntos com m e n elementos, respectivamente, então a quantidade de funções sobrejetivas de A em B é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Prova. Este problema é semelhante ao anterior onde $m = 30$ e $n = 4$.

Logo devemos determinar o coeficiente de $\frac{x^m}{m!}$ na expressão $(e^x - 1)^n$. Temos que

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{x(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (-1)^k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} (n-k)^m \frac{x^m}{m!}\right)\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m\right] \frac{x^m}{m!}.$$

Portanto segue o resultado. $\square$