OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
26^a **Semana Olímpica - Rio de Janeiro - RJ.**
23 a 27 de janeiro de 2023.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Igualdades e desigualdades envolvendo a integral de Riemann

Nível Universitário

1 Introdução

Nas competições Matemática para o nível universitário é praticamente obrigatório encontrarmos problemas que envolvem a integral de Riemann e suas propriedades. Neste breve material, fazemos um resumo das principais propriedades envolvendo a integral de Riemann, com um resumo dos resultados centrais da teoria. Além disso, também trazemos um apanhado de ideias sobre desigualdades clássicas (Cauchy-Schwarz, Hölder, Young, Minkoviski,...) envolvendo a integral de Riemann. Ao longo do texto aprsentamos a solução detalhada de alguns problemas extraídos de competições Matemáticas ao redor do mundo e ao final apresentamos uma extensa lista de problemas propostos que foram extraídos de provas de olimpíadas de Matemática ou que tem um sabor olímpico. Sejam bem vindos à integral de Riemann!!!

2 Primitivas

Dizemos que uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ quando $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Para indicarmos que F é uma primitiva de f escrevemos $\int f(x)dx = F(x)$. Note que se F é uma primitiva para f , segue que $G(x) = F(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$ também é uma primitiva de f, visto que $G'(x) = F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Pode-se provar facilmente que se $F(x)$ é uma primitiva de f então todas as primitivas de f são da forma $G(x) = F(x) + K$, onde K é uma constante real.

3 A integral de Riemann e suas propriedades

Não apresentaremos aqui a formalização necessária à construção da definição da Integral de Riemann a partir do conceito de partição de um intervalo e dos limites das somas superiores e inferiores associadas a uma determinada função definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$,toda essa formalização pode ser encontradas por exemplo em [3]. Assumiremos a existência de integral de Riemann de uma determinada função f num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e a partir daí apresentaremos um resumo das principais propriedades e teoremas relacionados com a integral de Riemann. A seguir relebramos alguns resultados que garantem a integrabilidade de uma função real de variável real.

Teorema. 1. *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Teorema. 2. *Toda função monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Teorema. 3 (Propriedades da integral de Riemann)**.** *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$, tem-se que:*

- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$
- $\displaystyle\left|\int_b^a f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

- $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- *Se* $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$
- *Se* $a < c < b$, *então* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

3.1 O Teorema Fundamental do Cálculo e suas várias versões

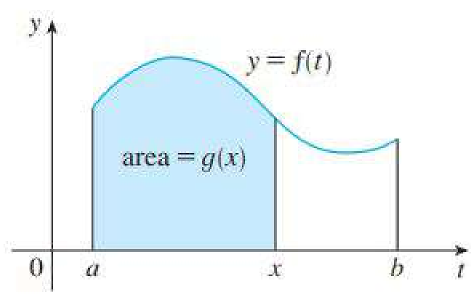
Nesta seção vamos estabelecer três versões do chamado Teorema Fundamental do Cálculo. Como o próprio nome sugere, esse teorema tem um papel central no Cálculo, sendo uma das ferramentas mais úteis tanto no desenvolvimento da teoria em si, como nas aplicações à Matemática e às ciências afins. Esse teorema relaciona duas das princiapais ideias do Cálculo; a derivada e a integral, ligando duas ideias geometricas completamente distintas, a saber: a reta tangente a uma curva e a área localizada sob o gráfico de uma função real num intervalo da reta real.

Teorema. 4 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 1)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável neste intervalo (e portanto contínua) e além disso, $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.*

Teorema. 5 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 2)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f, isto é, se $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Observação. 1. *Quando a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é não negativa, a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ reresenta geometricamente a área localizada sob o gráfico da função f, o eixo x e as retas verticais $x = a$ e $x = b$, conforme ilustra a figura a seguir:*



No caso em que f é uma função que possa assumir valores negativos no intervalo $[a,b]$ a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ representa a soma algébrica das áreas (áreas considerando-se os respectivos sinais) localizadas limitadas pelo eixo x, pela gráfico de f e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

Teorema. 6 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 3)**.** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, então:*

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Um outro resultado extremamente relevante dentro da teoria é o seguinte resultado:

Teorema. 7 (Mudança de variáveis)**.** *Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (onde I é um intervalo) uma função contínua e $g : [c,d] \to \mathbb{R}$, com g' contínua em $[c,d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nessas condições*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

Para finalizar este breve resumo, trataremos da famosa fórmula da integração por partes, que é uma ferramenta muito útil na determinação de certas primitivas e portanto de integrais definidas e o Teorema do valor médio para integrais.

Proposição. 1 (Fórmula da integração por partes)**.** *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

De fato, sabemos que

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \Rightarrow$$

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Observação. 2. *Boa parte dos autores costuma escrever a fórmula de integração por partes da forma a seguir:*

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

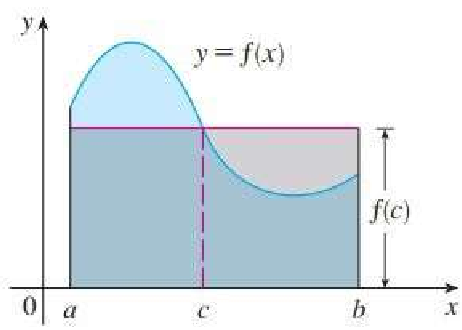
Quando queremos calcular $\int f(x)g(x)dx$*, podemos fazer*

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases}$$

Teorema. 8 (Teorema do Valor Médio para integrais)**.** *Se f for uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e m e M o mínimo e o máximo de f, respectivamente, então existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Observação. 3. *Interpretação Geométrica*



Por fim, vamos relembrar o conceito de **integrais impróprias**.

Definição. 3.1 (Integrais impróprias)**.** *Suponha que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ é integrável no intervalo $[a, r]$ para todo $r > a$, definimos a integral imprópria de f no intervalo $[a, \infty)$ como sendo*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx.$$

Analogamente, se $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ é integrável no intervalo $[r, b]$ para todo $r < b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^b f(x)dx.$$

3.2 Exemplos resolvidos

Exemplo. 3.1 (OMRN-2022)**.** *Mostre que* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+2023^{cosx}}dx = \frac{\pi}{2}$.

Solução. Fazendo a mudança de variáveis $x = \pi - y$, segue que $cosx = cos(\pi - y) = -cosy$ e $dx = -dy$. Portanto,

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2023^{cosx}}dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{1+2023^{-cosy}}(-dy)\\
&= -\int_{\pi}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{2023^{cosy}}}dy = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2023^{cosy}}}dy\\
&= \int_{\pi}^{0} \frac{2023^{cosy}}{1+2023^{cosy}}dy
\end{aligned}$$

Apenas trocando a variável (muda) y pela variável x na última equação, segue que

$$\int_{\pi}^{0} \frac{2023^{cosy}}{1+2023^{cosy}}dy = \int_0^{\pi} \frac{2023^{cosx}}{1+2023^{cosx}}dx.$$

Então,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2023^{cosx}}dx \text{ e } I = \int_0^{\pi} \frac{2023^{cosx}}{1+2023^{cosx}}dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2I = I + I &= \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2023^{cosx}}dx + \int_0^{\pi} \frac{2023^{cosx}}{1+2023^{cosx}}dx\\
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{2023^{cosx}}{1+2023^{cosx}} + \frac{2023^{cosx}}{1+2023^{cosx}}\right]dx\\
&= \int_0^{\pi} \frac{1+2023^{cosx}}{1+2023^{cosx}}dx = \int_0^{\pi} 1dx = (\pi - 0) = \pi
\end{aligned}$$

o que revela que

$$2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2023^{cosx}}dx = \frac{\pi}{2}.$$

■

Exemplo. 3.2. *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uma função injetiva e diferenciavel. Prove que a função* $F(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ *é monótona.*

Solução. Devemos mostrar que $F'(x) \geq 0$ ou $F'(x) \leq 0$ para do x real. Derivando em realcoa a variavel x a função

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}{x}$$

segue que

$$F'(x) = \frac{xf(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

Fazendo $h(x) = xf(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ e derivando novamente em realação a variavel x, segue que

$$h'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x)$$

Ora, como f e continua e injetiva, segue que $f'(x) \geq 0$ ou $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Temos, pois duas situacoes a considerar:

- Se $f'(x) \geq 0$, segue que $h'(x) \geq 0$ e portanto $F'(x) \geq 0$.
- Se $f'(x) \leq 0$, segue que $h'(x) \leq 0$ e portanto $F'(x) \leq 0$.

Em qualquer dos dois casos temos que F e monotona, como queriamos demonstrar! ■

Exemplo. 3.3. *Calcule* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1} dx.$

Solução. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}$. Essa função é ímpar, pois

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-\operatorname{sen} x}{x^2+1} = -\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1} = -f(x), \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Como o intervalo de integração $[-\pi, \pi]$ é simétrico em relação à origem, segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_{\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1} dx = 0,$$

pois a integral de uma função ímpar num intervalo simétrico em relação à origem é sempre igual a 0. ■

Exemplo. 3.4. *Seja f uma função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ e satisfazendo*

$$f(1) = 1 \ e \ f'(x) = \frac{1}{x^2 + (f(x))^2}.$$

Prove que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) < 1 + \frac{\pi}{4}.$

Solução. Como $f'(x) = \frac{1}{x^2+(f(x))^2} > 0$, segue que f é crescente. Assim,

$$t > 1 \Rightarrow f(t) > f(1) = 1.$$

Assim,

$$f'(t) = \frac{1}{t^2 + (f(t))^2} < \frac{1}{t^2+1}.$$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo, segue que:

$$f(x) - f(1) = \int_0^1 f'(t)dt \Rightarrow f(x) - 1 = \int_0^1 f'(t)dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) =& 1 + \int_0^1 f'(t)dt \\ <& 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \\ <& 1 + \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} \\ =& 1 + (\operatorname{arctg} t)_0^\infty \\ =& 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

■

Exemplo. 3.5. *Para todo inteiro positivo n, determine* $\displaystyle\int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} dx.$

Solução. Seja $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Assim, $f_n'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Portanto,

$$x^n = n! f_n(x) - n! f_n'(x) = n! \left(f_n(x) - f_n'(x) \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} dx = & \int \frac{n! \left(f_n(x) - f_n'(x) \right)}{f_n(x)} dx \\
= & \; n! \int \frac{\left(f_n(x) - f_n'(x) \right)}{f_n(x)} dx \\
= & \; n! \int \left(1 - \frac{(f_n'(x))}{f_n(x)} \right) dx \\
= & \; n! \left(\int 1 dx - \int (\ell n f_n(x))' \, dx \right) \\
= & \; n! x - n! \ell n f_n(x) + C \\
= & \; n! x - n! \ell n \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) + C
\end{aligned}$$

■

Exemplo. 3.6. *Seja f uma função real contínua e não negativa definida em $[0, 1]$ tal que*

$$(f(t))^2 \leq 1 + 2 \int_0^t f(s) ds, \;\; com \; t \in [0, 1].$$

Mostre que $f(t) \leq 1 + t$ para $t \in [0, 1]$

Solução. Seja $u(t) = 1 + 2 \int_0^t f(s) ds$. Pelo enunciado,

$$\begin{aligned}
f(t) & \leq \sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds} \\
& \leq \sqrt{u(t)}.
\end{aligned}$$

Derivando $u(t) = 1 + 2 \int_0^t f(s) ds$ em relação a t, tem-se que:

$$u'(t) = 2 f(t) \leq 2 \sqrt{u(t)} \Rightarrow \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} \leq 1.$$

Por outro lado, $\frac{d}{dt} (\sqrt{u(t)}) = \frac{1}{2\sqrt{u(t)}})$. Assim,

$$\frac{u'(s)}{2\sqrt{u(s)}} \leq 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{u'(s)}{2\sqrt{u(s)}} ds \leq \int_0^t 1 ds \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (\sqrt{u(s)}) = \frac{1}{2\sqrt{u(t)}} ds \leq \int_0^t 1 ds \Rightarrow \sqrt{u(t)} - \sqrt{u(0)} \leq t.$$

Mas ocorre que $u(0) = 1 + 2 \int_0^0 f(s) ds = 1 + 0 = 1$. Portanto,

$$\sqrt{u(t)} - \sqrt{u(0)} \leq t \Rightarrow \sqrt{u(t)} - \sqrt{1} \leq t \Rightarrow \sqrt{u(t)} \leq 1 + t.$$

Por fim, como $u(t) = 1 + 2 \int_0^t f(s) ds = (f(t))^2$, segue que:

$$\sqrt{u(t)} \leq 1 + t \Rightarrow \sqrt{(f(t))^2} \leq 1 + t \Rightarrow f(t) \leq 1 + t, \;\; \forall t \in [0, 1].$$

■

Exemplo. 3.7. *Encontre todas as funções integráveis em* $[0,a]$ *satisfazendo a condição*

$$0 \leq f(x) \leq k\int_0^x f(t)dt, \;\; \forall x \in [0,a] \;\; e \;\; k > 0.$$

Solução. Definindo a função $F : [0,a] \to \mathbb{R}$, por $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt \geq 0$, pelo Teorema fundamental do Cálculo, segue que $F'(x) = f(x), \; \forall x \in [0,a]$. Da desigualdade, $f(x) - k\displaystyle\int_0^x f(t)dt \leq 0$, segue que

$$F'(x) - k.F(x) \leq 0 \Rightarrow F'(x)e^{-kx} - kF(x)e^{-kx} \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F(x)e^{-kx}\right) \leq 0.$$

Assim,

$$\int \frac{d}{dx}\left(F(x)e^{-kx}\right)dx \leq \int 0dx \Rightarrow F(x)e^{-kx} \leq 0.$$

Por outro lado, $F(x) \geq 0$ e $e^{-kx} > 0$, segue que $F(x)e^{-kx} \geq 0$. Assim,

$$\begin{cases} F(x)e^{-kx} \leq 0 \\ F(x)e^{-kx} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x)e^{-kx} = 0 \Rightarrow F(x) = 0, \forall x \in [0,a].$$

Por fim,

$$F(x) = 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt = 0, \;\text{com } f(t) \geq 0, \;\forall t \in [0,a],$$

o que revela que $f(t) = 0, \; \forall t \in [0,a]$. ∎

Exemplo. 3.8. *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. *Mostre que* f *possui um ponto fixo, isto é, existe* $c \in [0,1]$ *tal que* $f(c) = c$.

Solução. De fato, defina $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(t) - t$. Note que a φ é contínua pois a f é, donde segue que a φ é integrável. Assim, integrando a função φ de 0 a 1, segue que:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(t) - t \Rightarrow \int_0^1 \varphi(t)dt = &\;\; \int_0^1 [f(t) - t]\,dt \\ = &\;\; \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt \\ = &\;\; \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{=1/2} - \tfrac{1}{2} \\ = &\;\; \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Como a φ é contínua e $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$, segue que existe pelo menos um ponto $c \in [0,1]$ tal que $\varphi(c) = 0$, pois se essa função contínua não zerasse em nenhum ponto a sua integral seria estritamente negativa ou estritamente positiva no intervalo $[0,1]$ (pense em termos das somas de Riemann). Assim,

$$\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$$

o que revela que a f tem pelo menos um ponto fixo. ∎

Exemplo. 3.9. *Encontre todas as funções continuas* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$\int_0^1 f(x)(x - f(x))dx = \frac{1}{12}.$$

Solução. Podemos reescrever $\displaystyle\int_0^1 f(x)(x-f(x))dx = \frac{1}{12}$ como

$$\int_0^1 f(x)(x-f(x))dx = \frac{1}{4}\int_0^1 x^2dx$$

ou ainda,

$$\int_0^1 \left(f^2(x) - xf(x) + \frac{x^2}{4}\right)dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx = 0$$

Como a função $g:(0,1)\to\mathbb{R}$ dada por $\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2$ e continua e nao negativa, segue pelo resuldado do problema anterior, que g e identicamente nula, ou seja, $\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{2}$ para todo $x \in (0,1)$. ■

Exemplo. 3.10. *Calcule a integral* $I = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx.$

Solução. Fazendo $x = asen\theta$ e depois $x = acos\theta$, obtemos:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{sen\theta}{sen\theta + cos\theta}d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{cos\theta}{sen\theta + cos\theta}d\theta$$

Adicionando essas duas integrais, obtemos:

$$\begin{aligned} 2I = &\int_0^{\pi/2} \frac{sen\theta}{sen\theta + cos\theta}d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{sen\theta}{sen\theta + cos\theta}d\theta \\ = &\int_0^{\pi/2} \frac{sen\theta + cos\theta}{sen\theta + cos\theta}d\theta \\ = &\int_0^{\pi/2} 1d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Assim, $2I = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow I = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{\pi}{4}.$ ■

Exemplo. 3.11. *Calcule a integral* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ell n(1+tgx)dx.$

Solução. Fazendo a mudanca de variavel $x = \frac{\pi}{4} - t$, segue que

$$\begin{aligned} I = &\int_0^{\pi/4} \ell n(1+tgx)dx \\ = &\int_{\pi/4}^0 \ell n(1+tg\left(\frac{\pi}{4}-t\right))(-1)dt \\ = &\int_0^{\pi/4} \ell n(1+\frac{1-tgt}{1+tgt})dt \\ = &\int_0^{\pi/4} \ell n(\frac{2}{1+tgt})dt \\ = &\int_0^{\pi/4} \ell n2dt - \int_0^{\pi/4} \ell n(1+tgt)dt \\ = &\tfrac{\pi}{4}\ell n2 - I \end{aligned}$$

Assim,

$$I = \frac{\pi}{4}\ell n2 - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\ell n2 \Rightarrow \int_0^{\pi/4} \ell n(1+tgx)dx = \frac{\pi}{8}\ell n2$$

. ■

Exemplo. 3.12 (OBMU-2018)**.** *Qual é o valor integral imprópria* $\int_0^{\pi} log(sen(x))dx$*?*

Solução. Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} log(sen(x))dx &= \int_0^{\pi} log(2sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2})dx \\
&= \int_0^{\pi} log(2)dx + \int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx + \int_0^{\pi} log(cos\frac{x}{2})dx \\
&= \pi.log2 + \int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx + \int_0^{\pi} log(cos\frac{x}{2})dx
\end{aligned}$$

Agora vamos manipular separadamente as integrais $\int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx$ e $\int_0^{\pi} log(cos\frac{x}{2})dx$.

Na integral $\int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx$ fazendo $u = \frac{x}{2}$, segue que $dx = 2du$ e novos os limites da integral são $u_1 = 0$ e $u_2 = \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx = 2\int_0^{\pi/2} log(sen(u))du$$

Apenas trocando a letra u pela letra x no segundo membro, segue que

$$\int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx = 2\int_0^{\pi/2} log(sen(x))dx$$

Por outro lado, usando a identidade $cos\frac{x}{2} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ podemos escrever

$$\int_0^{\pi} log(cos\frac{x}{2})dx = \int_0^{\pi} log(sen(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}))dx.$$

Nessa última integral fazendo $u = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$, segue que $dx = -2du$ e novos os limites da integral são

$$u_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} = \frac{\pi}{2} \quad e \quad u_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} log(cos\frac{x}{2})dx &= \int_0^{\pi} log(sen(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}))dx \\
&= -2\int_{\pi/2}^{0} log(sen(u))du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} log(sen(u))du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} log(sen(x))dx
\end{aligned}$$

Por fim voltando a igualdade

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} log(sen(x))dx &= \pi.log2 + \int_0^{\pi} log(sen\frac{x}{2})dx + \int_0^{\pi} log(cos\frac{x}{2})dx \\
& \pi.log2 + 2\int_0^{\pi/2} log(sen(x))dx + 2\int_0^{\pi/2} log(sen(x))dx \\
&= \pi.log2 + 4\int_0^{\pi/2} log(sen(x))dx \\
&= \pi.log2 + 2\int_0^{\pi} log(sen(x))dx
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^\pi log(sen(x))dx = \pi.log2 + 2\int_0^\pi log(sen(x))dx \Rightarrow \int_0^\pi log(sen(x))dx = -\pi.log2.$$

∎

Exemplo. 3.13 (OBMU-2005)**.** *Mostre que* $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$ *?*

Solução. Usando o fato $e^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-x}dx = & \int_0^1 e^{lnx^{-x}}dx \\
= & \int_0^1 e^{-xlnx}dx \\
= & \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xlnx)^k}{k!}dx \\
= & \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^k ln^k x dx \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{k!}x^k ln^k x dx \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(-ln^k x)dx
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular a integral $\displaystyle\int_0^1 x^k(-ln^k x)dx$. Para isso façamos a mudança de variável $u = -lnx$. Assim,

$$u = -lnx \Leftrightarrow x = e^{-u} \Rightarrow dx = -e^{-u}du.$$

Note que $x = 0$ implica que $u \to +\infty$ e $x = 1$ implica $u = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^k(-ln^k x)dx = & \int_\infty^0 e^{-ku}u^k(-e^{-u}du) \\
= & \int_0^\infty u^k e^{-u(k+1)}du
\end{aligned}$$

Agora vamos fazer a mudança de variáveis $v = (k+1)u$. Assim,

$$dv = (k+1)du \Rightarrow du = \frac{1}{k+1}dv.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^k(-ln^k x)dx = & \int_0^\infty u^k e^{-u(k+1)}du \\
= & \int_0^\infty \left(\frac{v}{k+1}\right)^k e^{-v}\frac{1}{k+1}dv \\
= & \int_0^\infty \frac{1}{(k+1)^{k+1}}v^k e^{-v}dv \\
= & \frac{1}{(k+1)^{k+1}}\int_0^\infty v^k e^{-v}dv
\end{aligned}$$

Lembrando que a função Γ é definida por $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ e que para $t = k+1$ inteiro, segue que $\Gamma(k+1) = k!$, segue que

$$\frac{1}{(k+1)^{k+1}}\underbrace{\int_0^\infty v^k e^{-v}dv}_{=\Gamma(k+1)=k!} = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(-ln^k x)dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\frac{k!}{(k+1)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $n = k+1$, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(-ln^k x)dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{k!}{(k+1)^{k+1}} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots\end{aligned}$$

■

Exemplo. 3.14. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f é contínua, g integrável e $g(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.*

Solução. Ora, como f é contínua e o seu domínio é um intervalo compacto $[a,b]$, segue que existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f(x) \leq M$. Por outro lado, como $g(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, segue que:

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Assim, integrando no intervalo $[a,b]$, segue que:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx \Rightarrow$$

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \Rightarrow m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Como a função f é, por hipótese, contínua no intervalo $[a,b]$, segue pelo teo do valor intermediário, que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

como queríamos demonstrar! ■

Em algumas ocasições estamos interessados em calcular limites de espressões que envolvem uma integral de Riemann. Neste ponto vale a pena lembrar que nem sempre é possível "colocar o limite para dentro da integral".Em que condições podemos comutar as posições dos simbolos do limite e da integral? O teorema a seguir oferece uma condição suficiente para isso.

Teorema. 9 (Convergência uniforme)**.** *Suponha que para cada inteiro positivo n a função $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja integrável. Se a sequência de funções $(f_n)_{n\geq 1}$* **converge uniformente** *para a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então f é Riemann integrável e além disso,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo. 3.15. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $f_n(x) = \frac{n+\cos x}{ne^x+\sin x}$,*

(a) *Mostre que a sequência de funções $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0,1]$.*

(b) *Mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n+\cos x}{ne^x+\sin x}dx = 1 - \frac{1}{e}$.*

Solução.

(a) De fato, para todo $x \in [0,1]$, tem-se que:

$$\left|\frac{n+\cos x}{ne^x+\sin x} - e^{-x}\right| = \left|\frac{\cos x - e^{-x}\sin x}{ne^x+\sin x}\right| \leq \frac{2}{n}.$$

(b) Ora, como a sequência de funções $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0,1]$, segue que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos x}{ne^x+\sin x}dx \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos x}{ne^x+\sin x}dx \\
&= \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -[e^{-1} - e^0] = 1 - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

■

4 A integral de Riemann e algumas desigualdades

Nesta seção vamos relembrar algumas das principais desigualdades classicas envolvendo a Integral de Riemann.

Teorema. 10 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, então:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Exemplo. 4.1 (IMC-2022)**.** *Seja $f : [0,1] \to (0,\infty)$ uma função integrável tal que $f(x)f(1-x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Prove que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq 1$.*

Solução. Inicialmente, fazendo a mudança de variáveis $1 - x = y$, segue que $dx = -dy$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx &= \int_0^1 f(1-x)dx \\
&= \int_1^0 f(y)(-dy) \\
&= -\int_1^0 f(y)dy \\
&= \int_0^1 f(y)dy \\
&= \int_0^1 f(x)dx
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 &= \int_1^0 f(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \\
&\geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2 \\
&= \left(\int_0^1 1dx\right)^2 = 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \geq 1$$

Ora, como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$, segue que

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \geq 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \geq 1.$$

■

Teorema. 11 (Desigualdade de Minkowski)**.** *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, se $p > 1$ então:*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema. 12 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se $p, q > 1$ são números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, se $p > 1$ então:*

$$\int_a^b f(x).g(x)dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Observação. 4. *A desigualdade de de Hölder também pode ser enunciada de forma ligeriramente diferente, a saber: Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e α e β são números reais positivos tais que $\alpha + \beta = 1$ então:*

$$\int_a^b [f(x)]^\alpha [g(x)]^\beta dx \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^\alpha \left(\int_a^b g(x)dx\right)^\beta.$$

Corolário. 1. *Se $f, g, \ldots, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ são números reais positivos tais que $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$ então:*

$$\int_a^b [f(x)]^\alpha [g(x)]^\beta \ldots [h(x)]^\lambda dx \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^\alpha \left(\int_a^b g(x)dx\right)^\beta \ldots \left(\int_a^b h(x)dx\right)^\lambda$$

Exemplo. 4.2. *Qual é o valor máximo atingido pelo quociente $\dfrac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f(x)^3 dx}$ onde f percorre o conjunto de todas as funções contínuas e positivas cujo domínio é o intervalo $[0,3]$.*

Solução. Aplicando a desigualdade de Hölder com $p = 3$ e $q = \frac{3}{2}$ para as funções $g(x) = 1$ e $f(x)$, segue que:

$$\int_0^3 f(x).1dx \leq \left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^3 |1|^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

Como f é positiva, segue que

$$\int_0^3 f(x)dx \leq 3^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3 \leq \left[3^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^3 f(x)^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3 \Rightarrow$$

$$\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3 \leq 9\int_0^3 f(x)^3 dx \Rightarrow \frac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f(x)^3 dx} \leq 9$$

o que revela que o número 9 é uma cota superior para o quociente $\dfrac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f(x)^3 dx}$. Por fim, note que se f é constante, isto é $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$\frac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f(x)^3 dx} = \frac{\left(\int_0^3 c dx\right)^3}{\int_0^3 c^3 dx} = \frac{27c^3}{3c^3} = 9,$$

o que revela que 9 realmente é o valor máximo atingido pelo quociente $\dfrac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f(x)^3 dx}$. ∎

Exemplo. 4.3. *Seja $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ uma função integrável e limitada tal que $\int_0^1 f^3(x)dx = \sqrt[7]{2}$. Prove que:*

$$\left(\int_0^1 f^5(x)dx\right)\left(\int_0^1 f^7(x)dx\right)\left(\int_0^1 f^9(x)dx\right) \geq 2.$$

Solução. Pela desigualdade de Hölder (corolário), seque que:

$$\left(\int_0^1 f^n(x)dx\right)^{\frac{3}{n}} \underbrace{\left(\int_0^1 1dx\right)^{\frac{n-3}{2n}}}_{=1}\underbrace{\left(\int_0^1 1dx\right)^{\frac{n-3}{2n}}}_{=1} \geq \int_0^1 [f^n(x)]^{\frac{3}{n}}.1^{\frac{n-3}{2n}}.1^{\frac{n-3}{2n}}dx = \int_0^1 f^3(x)dx = \sqrt[7]{2},$$

revelando que para todo inteiro positivo n, tem-se que:

$$\left(\int_0^1 f^n(x)dx)\right)^{\frac{3}{n}} \geq \sqrt[7]{2}$$

Assim, tomando $n = 5, 7$ e 9 obtemos:

$$\begin{cases} \left(\int_0^1 f^5(x)dx)\right)^{\frac{3}{5}} \geq \sqrt[7]{2} \\ \left(\int_0^1 f^7(x)dx)\right)^{\frac{3}{7}} \geq \sqrt[7]{2} \\ \left(\int_0^1 f^9(x)dx)\right)^{\frac{3}{9}} \geq \sqrt[7]{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\int_0^1 f^5(x)dx)\right) \geq \left(\sqrt[7]{2}\right)^{\frac{5}{3}} \\ \left(\int_0^1 f^7(x)dx)\right) \geq \left(\sqrt[7]{2}\right)^{\frac{7}{3}} \\ \left(\int_0^1 f^9(x)dx)\right) \geq \left(\sqrt[7]{2}\right)^{\frac{9}{3}} \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro as desigualdades acima, segue que:

$$\left(\int_0^1 f^5(x)dx\right)\left(\int_0^1 f^7(x)dx\right)\left(\int_0^1 f^9(x)dx\right) \geq \left(\sqrt[7]{2}\right)^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\frac{9}{3}} = (\sqrt[7]{2})^7 = 2.$$

∎

Teorema. 13 (Desigualdade de Tchebyshev)**.** *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções crescentes integráveis então:*

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

Exemplo. 4.4. *Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que*

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2dx.$$

Solução. Aplicando a desigualde de Cauchy-Schwarz aplicada para as funções $g(x) = 1$ e $f(x)$, segue que:

$$\left(\int_0^1 1.f(x)dx\right)^2 \leq \underbrace{\left(\int_0^1 1^2dx\right)}_{=1}\left(\int_0^1 f(x)^2dx\right) \Rightarrow \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2dx.$$

Uma outra alternativa seria usar a desigualdade de Tchebyshev, segue que:

$$(1-0)\int_0^1 f(x)f(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)^2dx \geq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \Rightarrow \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2dx.$$

■

Teorema. 14 (Desigualdade de Young)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função crescente contínua tal que $f(0) = 0$ então:*

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx.$$

5 Problemas propostos

1. (IMC-1994)

   (a) Sejam $f \in C[0, b], g \in C(\mathbb{R})$ e g com período b. Prove que $\displaystyle\int_0^b f(x)g(nx)dx$ tem limite quando $n \to \infty$ e

   $$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx \cdot \int_0^b g(x)dx.$$

   (b) Determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+3\cos^2 nx}dx.$

2. (IMC-1995)Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$ tal que para todo $x \in [0, 1]$ temos $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}$.

3. (IMC-1995)Suponha que $(f_n)_{n\geq 1}$ é umma sequência de funções contínuas no intervalo $[0, 1]$ tal que

   $$\int_0^1 f_m(x)f_n(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

   e $\sup\{|f_n(x)| \; ; \; x \in [0, 1] \text{ e } n = 1, 2, \ldots\} < +\infty$. Mostre que não existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ existe para todo $x \in [0, 1]$.

4. (IMC-1995)Seja $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função definida por

   $$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}, \quad x > 1.$$

   Mostre que F é uma a um (é injetiva) e determine o seu conjunto imagem.

5. (IMC-1996)Calcule a integral definida $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{(1+2^x)\operatorname{sen} x}dx$, onde n é um número natural.

6. (IMC-1996)

   (a) Sejam ,b números reais tais que $b \le 0$ e $1+ax+bx^2 \ge 0$ para todo $x \in [0,1]$. Prove que

   $$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (1+ax+bx^2)^n dx = \begin{cases} -\frac{1}{a} & \text{se } a<0 \\ +\infty & \text{se } a \ge 0 \end{cases}.$$

   (b) Seja $f:[0,1]\to[0,\infty)$ uma função com derivada segunda contínua tal que $f''(x)\le 0$ para todo $x\in[0,1]$. Supondo que $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (f(x))^n dx$ existe e $) < L < +\infty$. Prove que f' tem sinal constante e $\min_{x\in[0,1]} |f'(x)| = L^{-1}$.

7. (IMC-1998)Seja $f(x) = 2x(1-x), x\in\mathbb{R}$. Definindo $f_n = f\circ \underbrace{f\ldots\circ f}_{n \text{ cópias}}$.

   (a) Determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$, para $n = 1,2,\ldots$.

8. (IMC-1998)Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que para quaisquer x e y no intervalo $[0,1]$ tem-se que $xf(y)+yf(x) \le 1$.

   (a) Mostre que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \le \frac{\pi}{4}$.

   (b) Determine uma função satisfazendo a condição, para a qual a igualdade ocorre.

9. (IMC-2000)Seja $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ uma função crescente tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$ e f' é limitada. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Defina a sequência $(a_n)_{n\ge1}$ definida indutivamente por

   $$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)},$$

   e a sequência $(b_n)_{n\ge1}$ por $b_n = F^{-1}(n)$ Prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

10. (IMC-2000)Suponha que o gráfico de um polinômio de grau 6 é tangente a uma reta contendo três pontos A_1, A_2 e A_3, onde A_2 está entre A_1 e A_3.

    (a) Prove que se as medidas dos segmentos A_1A_2 e A_1A_3 são iguais, então as medidas das áreas das figuras limitadas por esses segmentos e o gráfico do polinômio também são iguais.

    (b) Sendo $k = \frac{A_2A_3}{A_1A_2}$, e seja K a razão entre as medidas das áreas das correspondentes figuras. Prove que

    $$\frac{2}{7}k^2 < K < \frac{7}{2}k^5.$$

11. (OBMU-2001)Para todo real u, seja $I(u) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1-2u\cos x+u^2)dx$.

    (a) Prove que $I(u) = I(-u) = \frac{1}{2}I(u^2)$.

    (b) Calcule $I(u)$ para todo $u\in\mathbb{R}$.

12. (OBMU-2002) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$.

13. (IMC-2003)Sejam $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma sequência de funções definida por $f_0(x) = g(x)$ e

    $$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt \quad x\in(0,1], n = 1,2,\ldots.$$

    Determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x\in(0,1]$.

14. (IMC-2003)Calcule o limite $\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{sen^m t}{t^n}dt \quad (m,n\in\mathbb{N})$.

15. (OBMU-2004)Calcule a integral $\int_{-1}^{1}\frac{x^{2004}}{1+e^x}dx$.

16. (IMC-2004) Sejam $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$ funções contínuas e não decrescentes tais que para cada $x\in[a,b]$ tem-se que

$$\int_a^x\sqrt{f(t)}dt\le\int_a^x\sqrt{g(t)}dt \text{ e } \int_a^b\sqrt{f(t)}dt=\int_a^b\sqrt{g(t)}dt$$

Prove que $\int_a^b\sqrt{1+f(t)}dt\ge\int_a^b\sqrt{1+g(t)}dt$.

17. (IMC-2004)Prove que $\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{x^{-1}+|\ln y|-1}\le 1$.

18. (OBMU-2005)Calcule a integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tanx)dx$.

19. (OBMU-2005)Sejam f e g funções contínuas distintas em $[0,1]$ em $(0,+\infty)$ tais que $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$. Para $n\ge 0$, seja $y_n=\int_0^1\frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^n}dx$. Prove que $(y_n)_{n\ge 0}$ é uma sequência crescente e divergente.

20. (IMC-2005)Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Prove que:

$$\left|\int_0^1 f^3(x)dx-f^2(0)\int_0^1 f(x)dx\right|\le\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

21. (OBMU-2006)Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função integrável e crescente. Prove que

$$\int_0^1 xf(x)dx\ge\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

22. (OBMU-2006)Calcule

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1-x}{(e^x-1)x}dx$$

.

23. (OBMU-2008)Seja $Q=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$ um quadrado de lado 1 e $f:Q\to R$ uma funçõa contínua positiva. Prove que é possível dividir Q em duas regiões R_1 e R_2 de mesma área, separadas por um segmento de reta, tais que $\int_{R_1}f(x,y)dxdy=\int_{R_2}f(x,y)dxdy$

24. (OBMU-2009)Seja $f:[0,1]\to[0,1]$ crescente, derivável e inversível. Se $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f^{-1}(x)dx$, prove que existem dois reais diferentes a e b, $0\le a<b\le 1$ tais que $f'(a)=f'(b)$ Obs. f^{-1} denota a inversa de f.

25. (OBMU-2009)Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{(\sin x+\cos x)\cos x}dx$.

26. (ICM-2010)Se $0<a<b$, prove que:

$$\int_a^b(x^2+1)e^{-x^2}dx\ge e^{-a^2}-e^{-b^2}.$$

27. (OBMU-2015)Mostre que, para todo $b>0$, temos $I(b)=\int_1^\infty\frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b}du>\frac{\pi}{2}$.

28. (ICM-2015)Calcule $\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx$.

29. (ICM-2016)Hoje, Ivan o Confessor prefere todas as funções contínuas $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ satisfazendo $f(x)+f(y)\geq |x-y|$ para quaisquer $x,y\in[0,1]$. Determine o valor mínimo assumido por $\int_0^1 f(x)dx$ sobre todas as funções preferidas.

30. (ICM-2017)Seja $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ uma função diferenciável, e suponha que exista uma constante $L>0$ tal que

$$|f'(x)-f'(y)|\leq L|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Prove que $(f'(x))^2 < 2Lf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

31. (ICM-2017)Seja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{n\to\infty} f(x)=L$ existe (pode ser finito ou infinito). Prove que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx = L.$$

32. (ICM-2019)Seja $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que

$$2f'(x)+xf''(x)\geq 1,\ \text{para todo } x\in(-1,1).$$

Prove que

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx\geq\frac{1}{3}.$$

33. (ICM-2019)Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções contínuas tal que g é diferenciável. Assumindo que $(f(0)-g'(0))(g'(1)-f(1))>0$. Mostre que existe um ponto $c\in(0,1)$ tal que $f(c)=g'(c)$.

34. Seja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função continua tal que $f(x)\neq 0$ para todo $x>0$. Mostre que:

$$(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f(x)=x,\quad \forall x\in[0,\infty)$$

35. a)Calule as integrais

$$I=\int_0^1 x^4(1-x)^4dx \ \text{ e } \ J=\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$$

b)Mostre que $\frac{I}{2}\leq J\leq I$.

c)Conclua que $\frac{22}{7}-\frac{1}{630}\leq\pi\leq\frac{22}{7}-\frac{1}{1260}$.

36. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função integrável tal que $\frac{1}{f}$ também é integrável. Mostre que:

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^1\frac{1}{f(t)}dt\right)\geq 1$$

37. Se f é contínua em $[0,1]$, mostre que

$$\int_0^\pi xf(senx)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(senx)dx$$

38. (OBMU-2019)Seja R_2 o $\mathbb{R}$-espaço vetorial formado pelos polinômios com coeficientes reais e de grau no máximo 2. Então, sobre a identidade

$$\int_0^6 p(x)dx=\alpha.p(0)+\beta.p(1)+\gamma.p(2)$$

podemos afirmar:

(a) ela é satisfeita para todo $p(x)\in R_2$, se e só se, $\alpha=15,\beta=-36,\gamma=27$.

(b) não existem α,β,γ reais que tornam a identidade verdadeira para todo $p(x)\in R_2$.

(c) Há infinitos valores de α, β, γ reais que tornam a identidade verdadeira para todo $p(x) \in R_2$.

(d) ela é satisfeita para todo $p(x) \in R_2$, se e só se, $\alpha = 10, \beta = -16, \gamma = 12$.

39. (OBMU-2019)Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)}dx$.

   (a) 1
   (b) $\ln 2$
   (c) $\ln\left(\frac{2+e^2}{2+2e}\right)$
   (d) $\ln\left(\frac{e^2}{1+e}\right)$

40. (OBMU-2019)Determine o valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos(2x)^2}dx$.

   (a) $\frac{\pi}{2}$
   (b) $\frac{\pi^2}{4}$
   (c) $\frac{\pi}{8}$
   (d) $\frac{\pi^2}{16}$

41. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável tal que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx \geq 3$.

42. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $f(a) = 0$. Mostre que:

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq (b-a)^2 \int_a^b f'^2(x)dx.$$

43. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e seja n um inteiro positivo. Prove que existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{1}{n+1}f(\alpha)$.

44. Suponha que $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ admide segunda derivada em $[a,b]$ e que

$$\psi(a) = \psi(b) = \psi'(a) = \psi'(b) = 0.$$

Mostre que existe uma constante positiva M tal que

$$\left|\int_a^b cos(\theta x)\psi(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)M}{\theta^2}dx.$$

45. (A integral de Frullani) Considere a seguinte integral, chamada de integral de Frullani

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx.$$

Assumindo que $a, b > 0$ e que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua cujo limite quando $x \to \infty$ existe e que $f(\infty) := \lim_{x\to\infty} f(x)$. Mostre que:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = [f(0)-f(\infty)]\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

46. Suponha que $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ é diferenciável em $[0,1]$ e $|f'(x)| \leq M$ para alguma constante $M > 0$. Seja

$$F(x) = \int_0^{f(x)} e^{-2t}dt,$$

onde $x \geq 0$. Prove que $|F'(x)| \leq M$.

47. Seja a uma constante real tal que $a \in [0,1]$. Determine todas as funções contínuas não negativas f definidas em $[0,1]$ que satisfazem
$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a, \text{ e } \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

48. Sejam f e g duas funções reais continuamente diferenciáveis no intervalo $[a,b]$, tal que f' e g' são não negativas no mesmo intervalo. Além disso, f não é constante e $f(0) = 0$. Mostre que para $0 < a \leq b$, temos:
$$f(a)g(b) \leq \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^b f(x)g'(x)dx$$

49. (Berkeley) Seja $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função contínua, crescente e bijetiva. Mostre que:
$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab,$$
onde a e b são dois números reais positivos arbitrários.

50. (Leningrado) Sejam $f, g : [0,1] \to [0,1]$ funções contínuas, onde f é não-decrescente. Mostre que:
$$\int_0^1 (f \circ g)(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

51. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, mostre que $f = g$.

52. Dê um exemplo de funçõescontínuas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$, mas $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

53. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função convexa e contínua, mostre que:
$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

54. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, não negativa e crescente (respectivamente decrescente). Prove que toda primitiva de f é estritamente convexa (respesctivamente, estritamente côncava).

55. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $f(a) = f(b) = 0$. Prove que:
$$\left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^2 \leq 4 \left(\int_a^b x^2 f(x)^2 dx\right)^2 \left(\int_a^b f'(x)^2 dx\right)^2.$$

56. (Romênia) Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tais que
$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 1.$$
Calcule $\inf_{f \in \mathcal{F}} \displaystyle\int_0^\pi f(x)^2 dx$.

57. (Romênia)Dado $a > 0$, mostre que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{x^n + a} dx = \log\left(\frac{a+1}{a}\right)$.

58. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com extremos α e β, $f, gI \to (0, +\infty)$ funções integráveis e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)^p dt = \int_\alpha^\beta g(t)^q dt = 1$, mostre que: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt \leq 1$.

59. (Berkeley)Seja $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas e não negativas tais que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^k \varphi_n(x)dx$ existe, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Prove que para qualquer função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, o limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$ também existe.

60. (Putman) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x)x^k dx = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Prove que f é identicamente nula.

61. (Berkeley) Existe uma função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^q f(x)xdx = 1$ e $\displaystyle\int_0^q f(x)x^k dx = 0$ para todo inteiro não negativo $k > 1$? Justifique a sua resposta.

62. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s$, com $s \in \mathbb{R}$. Definindo

$$g(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}.t + \frac{a_2}{2!}.t^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}.t^n + \ldots$$

Mostre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} g(t)dt = s$.

63. A função de Bessel de ordem 0 é definida por

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots + \frac{(-1)^m}{m!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \ldots$$

Mostre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} J_0(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

64. (a) Sendo i a unidade imaginária dos números complexos, mostre que:

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

(b) Usando o item anterior, mostre que $\displaystyle\int_0^\infty \log(1 - 2x^{-2}\cos 2\varphi + x^{-4})dx = 2\pi \sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$

65. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável limitada inferiormente por uma cota positiva. Mostre que:

$$\frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx} \leq e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

66. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ e $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Mostre que:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi[f(x)]dx.$$

67. Sejam $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis tais que $m \leq f(x) \leq M, p(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b p(x)dx > 0$. Se $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, mostre que:

$$\varphi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)dx}{\displaystyle\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b p(x)\varphi[f(x)]dx}{\displaystyle\int_a^b p(x)dx}.$$

68. As funções $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, p é estritamente positiva e $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. Se $: [m, M] \to \mathbb{R}$ é duas diderenciável e $\varphi''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, mostre que:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi[f(x)]dx.$$

69. As funções $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas e estritamente positivas. Se f não é constante. Mostre que:

(a) $\dfrac{\int_a^b p(x)dx}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}dx} < e^{\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} < \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}}$.

(b) $e^{\frac{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)} \log f(x) dx}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)} dx} < \frac{\int_a^b p(x) dx}{\int_{a^b} \frac{p(x)}{f(x)} dx}}$.

(c) $\dfrac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} < e^{\frac{\int_a^b p(x)f(x)\log f(x)dx}{\int_a^b p(x)f(x)}}$.

70. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável limitada inferiormente por uma cota positiva. Mostre que a função definida por

$$\psi(t) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^t dx \right)^{\frac{1}{t}}$$

é não decrescente para todo valor de t. Além disso, calcule o valor de:

$$\psi(-\infty), \qquad \psi(-1), \qquad \psi(0), \qquad \psi(1), \qquad \psi(+\infty).$$

Para o cálculo de $\psi(-\infty)$ e $\psi(+\infty)$ assuma que f é contínua.

71. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, mostre que:

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log[f(x)+g(x)]dx} \geq e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx} + e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)dx}.$$

72. Seja f uma função contínua, positiva, real de variável real, com período 2π e $p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $\displaystyle\int_0^{2\pi} p(x)dx > 0$. Mostre que a função definida por $F(x) = \dfrac{\displaystyle\int_0^{2\pi} p(t)f(t+x)dt}{\displaystyle\int_0^{2\pi} p(t)dt}$ é positiva e contínua. Além disso, mostre que

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F(x)dx} \geq e^{\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log f(x)dx}.$$

73. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ uma funções integravéis. Definindo

$$M_\alpha(f) := \left(\int_a^b [f(x))]^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ e } M_\alpha(g) := \left(\int_a^b [g(x))]^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

mostre que:

$$M_\alpha(f+g) \leq \text{ ou } \geq M_\alpha(f) + M_\alpha(f),$$

dependendo se $\alpha \geq 1$ ou $\alpha \leq 1$.

74. Sejam a, A, b, B números reais positivos tais que $a < A, b < B$ Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis tais que $a \leq f(x) \leq A, b \leq g(x) \leq B, \ \forall x \in [a,b]$, então

$$1 \leq \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2} \leq \frac{\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2}{2}$$

75. Seja $f : (0,1)^o\mathrm{R}_+$, não decrescente e não identicamente nula. Se $0 < a < b$ e todas as integrais que aparecem a seguir estão bem definidas, mostre que:

$$1 - \left(\frac{a-b}{a+b+1} \right)^2 \leq \frac{\left(\int_0^1 x^{a+b} f(x)dx \right)^2}{\int_0^1 x^{2a} f(x)dx \int_0^1 x^{2b} f(x)dx} < 1.$$

Além disso, mostre que a igualdade do lado esquerdo ocorre se, e somente se $f(x)$ é uma constante.

76. (Mathematical Reflections - vol01 - 2019) Seja n um inteiro positivo. Prove que

$$\int_1^n (x-1)(x-2)\dots(x-n)dx = 0.$$

77. (Mathematical Reflections - vol01 - 2019)Para cada função contínua $f : [0,1] \to [0,+\infty)$, seja

$$I_f = \int_0^1 (2f(x) + 3x)f(x)dx$$

e

$$J_f = \int_0^1 (4f(x) + x)f(x)dx.$$

Determine o valor mínimo de $I_f - J_f$ para todas tais funções f.

78. (Mathematical Reflections - vol01 - 2019)Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = 0$ e $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = 1$. Prove que

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq (2n+3)(n+1)^2.$$

Quando ocorre a igualdade?

79. (Mathematical Reflections - vol02 - 2019)Calcule $\displaystyle\int \frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1}dx$.

80. (Mathematical Reflections - vol03 - 2019) Sejam $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ uma função contínua e A o conjunto de todos os inteiros positivos n tais que existe um número real x_n tal que $\int_{x_n}^1 f(t)dt = \frac{1}{n}$. Prove que o conjunto $\{x_n\}_{n\in A}$ é uma sequência infinita e determine $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$.

81. (Mathematical Reflections - vol03 - 2019) Sejam $\lfloor x \rfloor$ a função piso e $k \geq 3$ um inteiro positivo. Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^k}dx$.

82. (Mathematical Reflections - vol04 - 2019)Sejam a e b números reais positivos. Calcule $\displaystyle\int_{a^{-b}}^{a^b} \frac{\arctan x}{x}dx$.

83. (Mathematical Reflections - vol04 - 2019)Calcule $\displaystyle\int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + x)^{2019}dx$.

84. (Mathematical Reflections - vol05 - 2019)Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = x\arctan x - \ln(1+x^2).$$

Prove que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \geq 3\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

85. (Mathematical Reflections - vol06 - 2019)Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^3+1)\sqrt{x}}dx$.

86. (Mathematical Reflections - vol01 - 2020)Calcule $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}dx$.

87. (Mathematical Reflections - vol01 - 2020)Calcule $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{2021+4\sin^2 x}dx$.

88. (Mathematical Reflections - vol02 - 2020)Considere o polinômio $P(x) = x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 12x^3 + 16x^2 + 16x + 8$. Calcule $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x^9+16x}{P(x)P(-x)}dx$.

89. (Mathematical Reflections - vol03 - 2020)Seja $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ uma função contínua. PAra cada inteiro positivo n denote $t_n := n\sqrt[n]{n}$. Calcule $\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

90. (Mathematical Reflections - vol04 - 2020)Calcule $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t}\arctan\frac{3t}{t^2+4}dt$.

91. (Mathematical Reflections - vol05 - 2020) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}dx$.

92. (Mathematical Reflections - vol05 - 2020) Calcule $\displaystyle\int_0^2 (1+\ln x)x^x dx$.

93. (Mathematical Reflections - vol06 - 2020) Calcule $\displaystyle\int x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)dx$.

94. (Mathematical Reflections - vol06 - 2020) Calcule $\displaystyle\int \frac{-2x^2\ln x}{\sqrt{1-x^2}(x^4-x^2+1)}dx$.

95. (Mathematical Reflections - vol01 - 2021) Seja n um inteiro positivo. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n+1}}\left(\int_0^x e^{t^n}dt - x\right)dx$.

96. (Mathematical Reflections - vol01 - 2021) Prove que $\displaystyle\int_e^{4e}\frac{dx}{\ln x-\ln 2}\geq\frac{90e}{34\ln 2+15}$.

97. (Mathematical Reflections - vol02 - 2021) Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^n x}$, onde n é um inteiro positivo.

98. (Mathematical Reflections - vol03 - 2021) Calcule $\displaystyle\int_a^b\left\{\frac{x^2+1}{x^2-x+1}dx\right.$, em termos de a e b,onde $a<0<b$ e $\{t\}$ denota a parte fracionária de t.

99. (Mathematical Reflections - vol03 - 2021) Calcule $\displaystyle\int_2^3 xe^x(\ln x+1)dx$.

100. (Mathematical Reflections - vol04 - 2021) Calcule $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t}\arctan\frac{3t}{t^2+4}dt$.

101. (Mathematical Reflections - vol05 - 2021) Seja $a>2$ um número real. Calcule $\displaystyle\int_0^a\frac{\tan^{-1}x}{ax^2-ax+a-1}dx$.

102. (Mathematical Reflections - vol06 - 2021) Calcule $\displaystyle\int\left(x+\frac{1}{4x}\right)\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$.

103. (Mathematical Reflections - vol03 - 2022) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\sqrt{7}-1}}(x^3+x)e^{-x^2}dx\leq\ln 2$.

104. (Mathematical Reflections - vol03 - 2022)Seja n um inteiro positivo. Calcule $\displaystyle\int_1^n\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor dx$, onde $\lfloor a\rfloor$ denota a parte inteira de a.

105. (Mathematical Reflections - vol03 - 2022)Seja $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ uma função diferenciável tal que $f(x)e^{f(x)}=x$, para todo $x\geq 0$.Calcule $\displaystyle\int_0^e f(x)dx$.

106. (Mathematical Reflections - vol04 - 2022)Calcule $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}dx$.

107. (Mathematical Reflections - vol04 - 2022) Se $a,b>0$, calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n\frac{x^n}{\sqrt{ax^{2n}+b}}dx$.

108. (Mathematical Reflections - vol04 - 2022) Se $\displaystyle f(m)=\int_0^1\frac{(x^m-1)\ln(1+x)}{x\ln x}dx$, calcule $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2\pi^2}{9m}-\frac{8f(m)}{2m^2}\right)$.

109. (Mathematical Reflections - vol06 - 2022) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 2x$ para todo $x \in [0, 1]$ Denotando

$$I_f = \int_0^1 x f(x)^3 dx \text{ e } I_g = \int_0^1 x^3 f(x) dx.$$

Determine o valor mínimo de $I_f - 3I_g$.

110. (Mathematical Reflections - vol06 - 2022) Se n é um inteiro positivo determine o valor de

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cos\left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \right] dx.$$

Referências

[1] Souza, Paulo Ney. Silva, Jorge Nuno. Berkley Problens in Mathematics, Springer Verlag, 1998.

[2] Neto, A. C. M. (2017). An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume I: Real Numbers and Functions. Springer.

[3] Lima, Elon Lages. Análise real. Rio de Janeiro: Impa, 2004.

[4] Honsberger, Ross. "Mathematical Morsels."Mathematical Association of (1979).

[5] Gelca, Razvan; Andreescu, Titu. Putnam and beyond. New York: Springer, 2007.

[6] Andreescu, Titu. Essential linear algebra with applications. Birkhauser, 2016.

[7] Pólya, G., Szegö, G. (1972). Problems and Theorems in Analysis: Series, integral calculus, theory of functions. Berlin: Springer.

[8] Feuillet, Christine; Selom, Isabelle. Algèbre-Geometrie 2° année - MP-MP*, Hachette Supérieur, 2004.

[9] www.obm.org.br

[10] www.imc-math.org.uk

[11] www.ematematicaoxente.com.br

[12] https://www.awesomemath.org

[13] https://www.imc-math.org.uk