Problemas Olímpicos de Dinâmica

Eduardo Ventilari Sodré

2022

1 Teoria

Sistemas dinâmicos são espaços ou configurações que evoluem ao longo do tempo segundo alguma regra de evolução. Dividem-se em contínuos, evoluindo continuamente ao longo do tempo e usualmente descritos por equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}),$$

e discretos, regidos pela iteração de uma função $f : X \to X$, com $f^0 = \mathrm{id}_X$, $f^{n+1} = f \circ f^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Sistemas dinâmicos em problemas de olimpíadas são quase sempre discretos.

Grande parte da dificuldade de se estudar sistemas dinâmicos está no fato de que, mesmo sabendo f, não há forma simples ou mesmo explícita para suas iteradas f^n ou como elas agem em elementos de X. Por isso procura-se propriedades qualitativas deles, principalmente comportamentos assintóticos e periódicos. Assuma de agora em diante que X é espaço métrico, ou mais simplesmente, que $X = \mathbb{R}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Um *ponto fixo* de um sistema dinâmico $f : X \to X$ é um elemento $p \in X$ tal que $f(p) = p$, e um *ponto periódico* (de período n) é tal que $f^n(p) = p$. Muitas vezes entender pontos fixos e periódicos é o primeiro passo para entender um sistema dinâmico.

Teorema 1.1. *Se $f : X \to X$ é contínua e, para algum $x \in X$, o limite $p = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ existe, então p é ponto fixo de f.*

Demonstração.

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(p)\right) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(p)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(p) = p.$$

□

Teorema 1.2 (Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) espaço métrico completo (pensar em conjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}^n$) e $f : X \to X$ contínua de modo que existe constante $\lambda \in [0, 1)$ tal que, para todos $x, y \in X$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

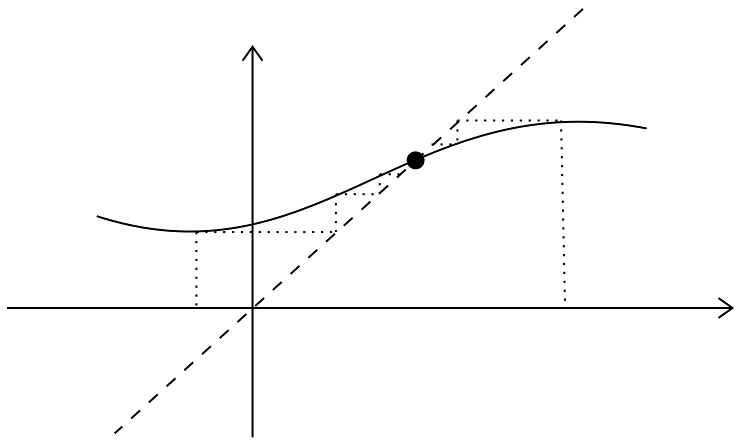
Então existe um único ponto fixo p de f, e, para todo $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$.

Demonstração. Veja que $\operatorname{diam} f(X) \leq \lambda \operatorname{diam} X$, então $\operatorname{diam} f^n(X) \leq \lambda^n \operatorname{diam} X$. $f^n(X)$ é sequência de compactos encaixantes com diâmetro $\to 0$, converge em um único ponto.

□

Para sistemas dinâmicos em $\mathbb{R}^n$, pode-se estudar o comportamento de f perto de seus pontos fixos, se pontos próximos são atraídos ou repelidos.

Proposição 1.3. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função de classe C^1 e $p \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de f tal que $|f'(p)| < 1$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ tem-se que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$.*



Demonstração. Lembre-se que

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p) \implies \lim_{x\to p} \frac{|f(x) - p|}{|x - p|} = |f'(p)| = \mu < 1,$$

em que, para x numa vizinhança suficientemente pequena de p, vale que $|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x - p|$ para todo $n \geq 0$ e algum $\lambda \in (\mu, 1)$. Então $f^n(x) \to p$. $\square$

No caso multidimensional, analisa-se o jacobiano de f em p, e seus autovalores de módulo diferente de 1 indicam direções de atração ou repulsão.

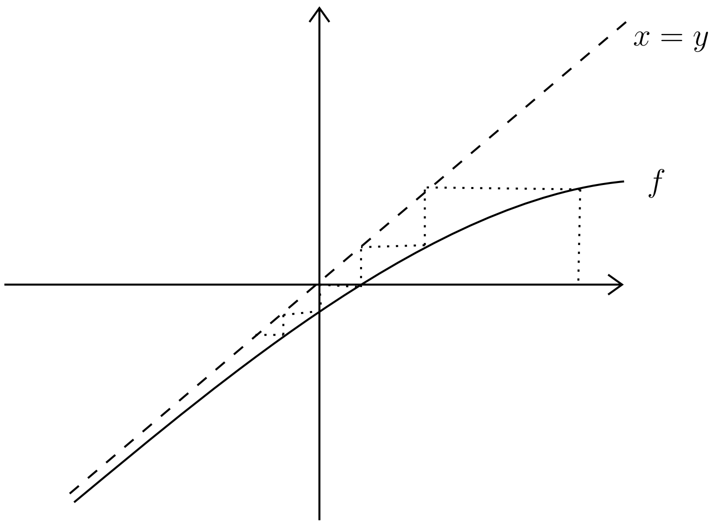
2 Problemas Solucionados

(OBMU 2ª fase, P4 2022) Dados $c, \alpha > 0$ considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = c$ e $x_{n+1} = x_n e^{-x_n^\alpha}$ para $n \geq 1$. Para quais valores reais de β a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\beta$ é convergente?

Solução. Por ser uma sequência que o próximo termo depende apenas do anterior, imediatamente pensa-se em sistemas dinâmicos discretos. Fazemos uma mudança para facilitar o problema: como $x_n > 0$ para todo n, toma $y_n = \log x_n$, de modo que $y_1 = \log c$ e

$$y_{n+1} = y_n - x_n^\alpha \implies y_{n+1} = y_n - e^{\alpha y_n}.$$

Considera-se a função $f : \mathbb{R}$ dada por $f(y) = y - e^{\alpha y}$, de modo que $f(y_n) = y_{n+1}$. Vamos entender ela como função e como sistema dinâmico. Como $f''(y) = -\alpha^2 e^{\alpha y} < 0$, é estritamente côncava, e não possui pontos fixos, pois $f(y) = y \iff e^{\alpha y} = 0$, que é impossível. Em particular, $f(y) < y$ para todo y. Ainda, como $f'(y) = 1 - \alpha e^{\alpha y}$, f é assintótica à reta $x = y$ com $y \to -\infty$, situando-se abaixo da reta.



f tem único ponto de máximo em $q = \frac{1}{\alpha}\log(1/\alpha)$, sendo estritamente crescente em $(-\infty, q]$ e estritamente decrescente em $[q, +\infty)$. Ainda, como $f(q) < q$, para todo $y \in \mathbb{R}$, tem-se $f(y) \leq f(q) < q$, estando no intervalo onde é estritamente crescente. Assim, $(y_n)_n$ é sequência estritamente decrescente. Se fosse limitada, seria convergente e convergiria para um ponto fixo, que não existem; então $y_n \to \infty$.

Defina as diferenças

$$d_n = y_n - y_{n+1} = e^{\alpha y_n} > 0,$$

de modo que $d_n \to 0$, e $(d_n)_n$ também estritamente decrescente. Para $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{\beta} = \sum_{n=1}^{N} e^{\beta y_n} = \sum_{n=1}^{N} (e^{\alpha y_n})^{\beta/\alpha} = \sum_{n=1}^{N} d_n^{\gamma},$$

onde $\gamma = \beta/\alpha$, necessitando analisar quando essa soma converge. Nota-se ainda que

$$\sum_{n=1}^{N} d_n = y_1 - y_{N+1} \to +\infty$$

por soma telescópica; como simples exercício de análise é fácil ver então que a soma também diverge para $\gamma \leq 1$, ou seja, $\beta \leq \alpha$.

para estudar quando $\sum d_n^{\gamma}$ converge, precisamos estudar a "velocidade de divergência" de y_n. Para isso, usamos a ferramenta do TVM. Para n suficientemente grande, $y_n \in (-\infty, q]$, onde f é côncava e estritamente decrescente. Pelo TVM,

$$\begin{gathered} f'(y_n)(y_n - y_{n+1}) < f(y_n) - f(y_{n+1}) < f'(y_{n+1})(y_n - y_{n+1}) \implies \\ (1 - \alpha e^{\alpha y_n})(y_n - y_{n+1}) < y_{n+1} - y_{n+2} < (1 - \alpha e^{\alpha y_{n+1}})(y_n - y_{n+1}) \implies \\ (1 - \alpha d_n)d_n < d_{n+1} < (1 - \alpha d_{n+1})d_n. \end{gathered}$$

A segunda desigualdade implica que

$$d_{n+1} < d_n - \alpha d_n d_{n+1} \implies \frac{1}{d_{n+1}} > \alpha + \frac{1}{d_n},$$

e por indução e para n grande, vale que

$$\frac{1}{d_{n+1}} < n\alpha \implies d_{n+1} < \frac{1}{n\alpha}.$$

Considerando a convergência da série harmônica, agora com $\gamma > 1$, é outro exercício de análise ver a convergência; ou seja, para $\beta > \alpha$. $\square$

(OBMU 2ª fase, P3 2019) São dados reais positivos a, b, c. Prove que o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + y + z = \sqrt{c^2 + z^2} + \sqrt{c^2 + y^2} \\ x + 2y + z = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + z^2} \\ x + y + 2z = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} \end{cases}$$

Possui exatamente uma solução real (x, y, z) com $x, y, z \geq 0$.

Solução. Transforma-se o problema em um de encontrar um ponto fixo de uma dada transformação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e procura-se utilizar teoremas de ponto fixo para deduzir existência e unicidade. Considera-se

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (&\frac{\sqrt{c^2 + z^2} - z + \sqrt{c^2 + y^2} - y}{2}, \\ &\frac{\sqrt{b^2 + x^2} - x + \sqrt{b^2 + z^2} - z}{2}, \\ &\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - y + \sqrt{a^2 + y^2} - y}{2}) \end{aligned}$$

onde $f(x, y, z) = (x, y, z)$ se e somente se (x, y, z) é solução do sistema. Note que toda solução real (x, y, z) deve ser tal que $x, y, z \geq 0$, e que f preserva o quadrante $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}$. Assim, podemos restrigir f a esse quadrante e procurar pontos fixos nele. Com $p = (x, y, z)$ e $f(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p))$, como $\sqrt{k^2 + x^2} - x \leq k$ para $k > 0$ e $x \geq 0$, temos que $f_1(p) \leq c$, $f_2(p) \leq b$ e $f_3(p) \leq a$. Assim, restringe-se f ainda ao conjunto limitado

$$S = \{(x, y, z) \in Q \mid x \leq c, y \leq b, z \leq a\},$$

onde todo ponto fixo deve estar contido. Considera-se a norma $\|\cdot\|_1$ em $\mathbb{R}^3$, dada por

$$\|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

e a distância $d(p, q) = \|p - q\|_1$ induzida por esta norma. Verifica-se que, com $p = (x_1, y_1, z_1)$, $q = (x_2, y_2, z_2) \in Q$, vale que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left|\sqrt{c^2 + y_1^2} - \sqrt{c^2 + y_2^2} - (y_1 - y_2)\right| &= \frac{|y_1 - y_2|}{2} \frac{\sqrt{c^2 + y_1^2} - y_1 + \sqrt{c^2 + y_2^2} - y_2}{\sqrt{c^2 + y_1^2} + \sqrt{c^2 + y_2^2}} \\ &\leq \frac{|y_1 - y_2|}{2} \frac{c + c}{c + c} = \frac{|y_1 - y_2|}{2}, \end{aligned}$$

e, junto com desigualdade análoga envolvendo z_1, z_2 com respeito a f_1, isto permite concluir que

$$d(f(p), f(q)) \leq d(p, q),$$

com igualdade se e somente se $p = q$. Mas isto não é suficiente para aplicar o teorema do ponto fixo de Banach. Se garantirmos que x, y, z são maiores que alguma constante positiva, será possível mostrar que f é contração com respeito à distância d em algum subconjunto de S. De fato, para $p \in Q$,

$$f_1(p) = \frac{\sqrt{c^2+z^2}-z}{2} + \frac{\sqrt{c^2+y^2}-y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\sqrt{c^2+z^2}+z} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2+y^2}+y}\right)$$

$$= \frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+z^2}+z} + \frac{1}{\sqrt{c^2+y^2}+y}\right) \geq \frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}+a} + \frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}+b}\right) = \gamma > 0,$$

γ constante real positiva. Analogamente encontra-se que $f_2(p) \geq \beta > 0$, $f_3(p) \geq \alpha > 0$. Assim, todo ponto fixo ainda está contido em

$$S' = [\gamma, c] \times [\beta, b] \times [\alpha, a],$$

e tal conjunto é invariante por f. Mas então na desigualdade que nos permitiu concluir que $d(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{|y_1-y_2|}{2}\frac{\sqrt{c^2+y_1^2}-y_1+\sqrt{c^2+y_2^2}-y_2}{\sqrt{c^2+y_1^2}+\sqrt{c^2+y_2^2}} &\leq \frac{|y_1-y_2|}{2}\frac{2c}{\sqrt{c^2+\beta^2}+\sqrt{c^2+\beta^2}} \\ &= k_{c,\beta}\frac{|y_1-y_2|}{2},\end{aligned}$$

onde $0 < k_{c,\beta} < 1$. Temos então que

$$|f_1(p) - f_1(q)| \leq k_{c,\beta}\frac{|y_1-y_2|}{2} + k_{c,\alpha}\frac{|z_1-z_2|}{2},$$

e então

$$\begin{aligned}d(f(p), f(q)) &\leq \frac{k_{a,\gamma}+k_{b,\gamma}}{2}|x_1-x_2| + \frac{k_{a,\beta}+k_{c,\beta}}{2}|y_1-y_2| + \frac{k_{b,\alpha}+k_{c,\alpha}}{2}|z_1-z_2| \\ &\leq \lambda d(p, q),\end{aligned}$$

Para alguma constante positiva $\lambda < 1$ tomando o máximo dos coeficientes dados a partir das constantes acima.

É possível então aplicar o teorema do ponto fixo de Banach em S', sendo conjunto fechado, deduzindo a existência e unicidade de solução real (x, y, z) com $x, y, z \geq 0$. $\square$

(OBMU 2ª fase P2 2019) Seja $\exp^{[0]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\exp^{[0]}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e defina recursivamente, para cada inteiro positivo n, as funções $\exp^{[n]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\exp^{[n]}(x) = e^{\exp^{[n-1]}(x)},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde e representa o número de Euler. Seja também $\log^{[0]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\log^{[0]}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e defina recursivamente para cada inteiro positivo n, as funções $\log^{[n]} : (\exp^{[n-1]}(0), +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\log^{[n]}(x) = \log(\log^{[n-1]}(x)),$$
$$\forall x \in (\exp^{[n-1]}(0), +\infty)$$

onde log é o logaritmo natural. Em outras palavras: $\exp^{[n]}$ representa a composição da função exponencial n vezes, e $\log^{[n]}$ representa a composição da função logaritmo n vezes, onde a composição puder ser feita.

Prove que existe uma função contínua e crescente $f : (0, +\infty)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\exp^{[n]}(\log^{[n]}(x) + 1)} = +\infty, \\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\exp^{[n+1]}(\log^{[n]}(x) - 1)} = 0. \end{cases}$$

Solução. Dada função f, considera-se sua transformada $T[f] := \exp \circ f \circ log$; note que

$$T\left[\exp^{[n]}(\log^{[n]}(x) + 1)\right] = \exp^{[n+1]}(\log^{[n+1]}(x) + 1),$$

e analogamente

$$T\left[\exp^{[n+1]}(\log^{[n]}(x) - 1)\right] = \exp^{[n+2]}(\log^{[n+1]}(x) - 1).$$

Mostra-se a seguinte propriedade: Se f, g são funções tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, definidas em alguma semirreta $(a, +\infty)$, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = 0 \text{ ou } +\infty \implies \lim_{x\to\infty} \frac{T[f]}{T[g]} = 0 \text{ ou } +\infty, \text{ respectivamente.}$$

Para isto, basta ver que

$$e^f / e^g = e^{f-g} = e^{g(f/g-1)} \to 0 \text{ ou } +\infty.$$

Assim, somos induzidos a procurar uma função $f : (0, \infty)$ tal que $T[f] = f$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x+1} = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{x-1}} = 0.$$

Naturalmente as funções $\exp^{[n]}$ satisfazem a propriedade, e ela é equivalente a f comutar com a exponencial. pensa-se então em uma função intermediária entre $x + 1$ e e^{x-1} que interpolaria, como uma meia-iterada: $f \circ f(x) = e^x$.

Para construir, toma $h \in (0, 1)$ e $f : (0, h] \to (h, 1]$ contínua e crescente qualquer tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = h$ e $f(h) = 1$. Estando f definida neste domínio fundamental $(0, h]$, estende-se o domínio de f para que a definição funcione. Se $x > 0$ é tal que $\log^{[m]}(x) \in (0, 1]$, divide-se em dois casos. Para $\log^{[m]}(x) \in (0, h]$, define-se

$$\widetilde{f}(x) := \exp^{[m]}(f(\log^{[m]}(x))),$$

e se $\log^{[m]}(x) \in (h, 1]$, define-se

$$\widetilde{f}(x) := \exp^{m+1}(f(\log^{[m]}(x))).$$

A função $\widetilde{f}$ assim construída é bem definida, é contínua, crescente, satisfaz $\widetilde{f} \circ \widetilde{f} = \exp$ e $T[\widetilde{f}] = \widetilde{f}$, e satisfaz os limites. □

3 Mais Problemas

(OBMU 1ª fase 2019) Seja C o disco de raio 1 centrado na origem de $\mathbb{R}^2$ e considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = \left(\frac{5x + 3y}{4}, \frac{3x + 5y}{4} \right).$$

Qual o menor n natural para o qual $T^n(C)$ contém pelo menos 2019 pontos (a, b) com coordenadas inteiras?

(1ª Olimφíada 2022) Dizemos que um real $a \geq -1$ é *philosofal* se existe uma sequência $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$, com $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ para todo $i \geq 1$, de modo que a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$, com $a_1 = a$, satisfaz

$$a_{n+1} = \epsilon_n \sqrt{a_n + 1}, \ \forall n \geq 1$$

e é periódica. Ache todos os reais *philosofais*.

(CIIM P5 2020) Determine todos os números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ tais que

$$x_{i+1} = \frac{x_i^3 + 2}{3x_i^2}$$

para $i = 1, 2 \ldots, 2020$ e, além disso, $x_{2021} = x_1$.

(CIIM P5 2018) Considere a transformação

$$\begin{aligned} T(x, y, z) = (\, & \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x, \\ & \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} y, \\ & \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} z). \end{aligned}$$

Determine todos os pontos $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ para os quais $T^n(x, y, z) \in [0, 1]^3$ para todo $n \geq 1$ natural.

(CIIM P5 ?) Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + c$. Definimos $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é pré-periódico se $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é finito. Mostre que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ é pré-periódico}\}$ é finito.

(OBMU P6 2020) Sejam $f(x) = 2x^2 + x - 1$, $f^0(x) = x$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para todo x real e $n \geq 0$ inteiro (ou seja, f^n é a n-ésima iterada de f).

(a) Determine o número de soluções reais distintas da equação $f^3(x) = x$.

(b) Determine, para cada $n \geq 0$ inteiro, o número de soluções reais distintas da equação $f^n(x) = 0$.

(Putnam A3 2020) Seja $a_0 = \pi/2$, e seja $a_n = \operatorname{sen}(a_{n-1})$ para $n \geq 1$. Determine se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

converge ou não.

(Putnam B1 2016) Seja $x_0, x_1, x_2, \ldots$ a sequência tal que $x_0 = 1$ e para $n \geq 0$, $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$. Mostre que a série infinita $\sum x_n$ converge e encontre sua soma.

(Putnam B5 2012) Suponha que $a_0 = 1$ e que $a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. $a_n - \log n$ tem limite finito com $n \to \infty$?