Problemas da Rioplatense (Homenagem ao Prof. Svetoslav Savchev – Beto)

17ª Olimpíada Matemática Rioplatense

Primer Nivel

5. Alrededor de una circunferencia están escritos 20 números enteros. Para cada uno de ellos, se calcula la suma de los 10 números que le siguen en el sentido de las agujas del reloj. Terminado esto, cada uno de los 20 números es sustituido por su correspondiente suma.
Demostrar que después de repetir varias veces este proceso, cada uno de los 20 números alrededor de la circunferencia será par.

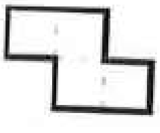
6. ¿Es posible colorear los puntos del plano que tienen coordenadas enteras con tres colores (deben usarse los tres colores) de manera que no haya ningún triángulo rectángulo con los tres vértices de colores diferentes?

Segundo Nivel

2. Dos personas participan en un juego donde hay fichas negras, fichas blancas y dos cajas. El primer jugador pone varias de sus fichas en una de las cajas, y otras varias en otra caja. Está permitido no poner ninguna ficha en una de las cajas y, además, no es obligatorio poner todas las fichas disponibles en las cajas. A continuación el segundo jugador elige una caja y toma todas las fichas de esa caja. De la otra caja, duplica el número de fichas de cada color y se las da al primer jugador, quedando ambas cajas vacías. Por turnos continúan jugando así.
El objetivo del primer jugador es lograr que sus fichas de uno de los colores sean exactamente el doble que sus fichas del otro color (en particular, si se queda sin fichas, gana). Si el primer jugador empieza con a fichas negras y b fichas blancas, ¿para qué valores de a y b el primer jugador puede lograr su objetivo, sin importar la estrategia del segundo jugador?

4. Diremos que un grupo de tres personas es $simétrico$ si cada una conoce a las otras dos o bien cada una no conoce a ninguna de las otras dos. En una fiesta hay 20 personas y cada una conoce a exactamente otras 9 personas de la fiesta. Halle el número de grupos simétricos de tres personas que hay en la fiesta.

6. Un cuadrado de $2n \times 2n$ se cubre, sin salirse del cuadrado, sin huecos ni superposiciones, con rectángulos de 1×2 y piezas como las de la figura (que cubren exactamente 4 cuadrados de 1×1).



Las figuras se pueden girar o dar vuelta. Demuestre que en el recubrimiento hay al menos $n + 1$ rectángulos de 1×2.

Tercer Nivel

1. En cada casilla de un tablero de a filas y b columnas está escrito un 0 o un 1 de modo que se verifican las siguientes condiciones.

- Si una fila y una columna se intersecan en una casilla con 0 entonces contienen el mismo número de ceros.
- Si una fila y una columna se intersecan en una casilla con 1 entonces contienen el mismo número de unos.

Halle todos los pares a, b, con $a \leq b$, para los cuales esto es posible.

2. Se tienen N segmentos cerrados en una recta. Se sabe que para cada $d, 0 < d \leq 1$, existen dos puntos en un segmento o en dos segmentos distintos que se encuentran a distancia d.

a) Demuestre que la suma de las longitudes de los segmentos es mayor o igual que $\frac{1}{N}$.
b) Demuestre, para cada N, que $\frac{1}{N}$ no se puede reemplazar por un número mayor.

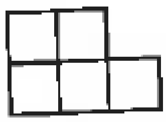
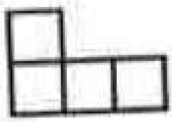
Nota: Un punto no es considerado un segmento cerrado.

4. Determine si los enteros positivos se pueden partir en 12 subconjuntos disjuntos tales que, para cada $k = 1, 2, \ldots$, los números $k, 2k, \ldots, 12k$ pertenecen a distintos subconjuntos.

6. Consideramos todas las colecciones de pesas con peso total igual a 65 en las que el peso máximo de una pesa es w. Halle el mayor valor de $w, 0 < w < \frac{65}{63}$, para el que cualquier colección se puede dividir con certeza en dos grupos cuyos pesos totales difieren en a lo sumo 1.
Nota: El peso de una pesa no es necesariamente un número entero.

18ª Olimpíada Matemática Rioplatense

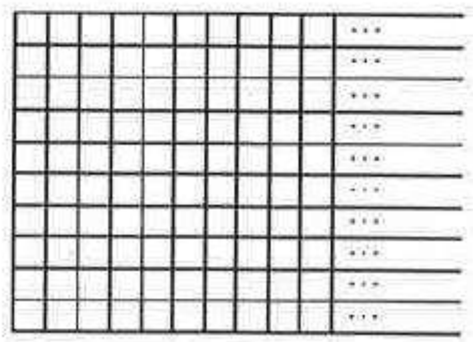
Primer Nivel

3. ¿De cuántas maneras se puede cubrir, sin superposiciones ni huecos, un tablero de 5×5 con una ficha de la forma  y 5 fichas de la forma  ?
ACLARACIÓN: está permitido rotar y voltear las fichas.

5. En cada casilla de un tablero de 100×100 está escrito un signo $+$.
Una $operación\ permitida$ consiste en elegir una fila o columna y cambiar todos los signos de esa línea (los signos $+$ por signos $-$ y viceversa).
Diremos que un número N es bueno si mediante una secuencia de operaciones permitidas se puede lograr un tablero con exactamente N signos $-$.
Determinar cuántos son los números buenos menores o iguales que 1000.

6. Determinar si es posible distribuir todos los enteros positivos en las casillas de un tablero de 10 filas e infinitas columnas como se muestra en la figura, de forma tal que se cumplan las siguientes condiciones a la vez:

- Cada entero positivo aparece exactamente una vez en el tablero.
- Si a, b, c son los números que aparecen de izquierda a derecha en tres casillas consecutivas de una misma fila, se cumple que $a + b$ es un divisor de $b + c$.



Segundo Nivel

2. Se tienen 2009 sucesiones finitas de 0 y 1. Ninguna de ellas coincide con el comienzo de otra. Si n es el total de 0 y 1 contenidos en las 2009 sucesiones, hallar el menor valor posible de n.

3. Se tienen 2009 bolitas, algunas blancas y las otras, negras. Todas las bolitas de un mismo color deberían tener el mismo peso, las blancas más livianas que las negras. Sin embargo se sabe que hay exactamente una bolita con el color equivocado, o sea, tiene el peso de una bolita del otro color.
Demostrar que se la puede identificar mediante 7 pesadas en una balanza de dos platos. (La balanza indica si los dos platos pesan lo mismo o cuál de los dos pesa más.)

6. Se tienen 4 varillas verticales. En la varilla 1 hay 2009 CD's de color a, en la varilla 2 hay 2009 CD's de color b y en la varilla 3 hay 2009 CD's de color c, formando tres torres. La varilla 4 está vacía.
La movida permitida es pasar el disco superior de una torre a otra varilla de modo que quede encima de los discos de esa torre, o pasarlo a una varilla vacía.
El objetivo es que queden 2009 discos en la varilla 1 con colores alternados $b, c, a, b, c, a, \ldots$ (de abajo hacia arriba), 2009 discos en la varilla 2 con colores alternados $c, a, b, c, a, b, \ldots$ (de abajo hacia arriba) y 2009 discos en la varilla 3 con colores alternados $a, b, c, a, b, c, \ldots$ (de abajo hacia arriba).
Mostrar cómo se puede lograr el objetivo en el menor número posible de movidas.

Tercer Nivel

3. Una permutación de los números enteros $(1, 2, \ldots, n)$ se llama d-ordenada si no contiene una subsucesión decreciente de longitud d.
Demostrar que para todo d tal que $2 \leq d \leq n$ el número de permutaciones d-ordenadas de $(1, 2, \ldots, n)$ es a lo sumo $(d-1)^{2n}$.

6. Dado un conjunto de rectángulos, la movida permitida es elegir dos de ellos que tengan un lado de la misma longitud y unirlos a lo largo de ese lado en un solo rectángulo. Dos jugadores A y B mueven por turnos, comenzando con un conjunto inicial de 1000 rectángulos de 1×2; A hace la primera movida. Pierde el jugador que en su turno no puede hacer una movida permitida.
Describir una estrategia ganadora para el jugador B.

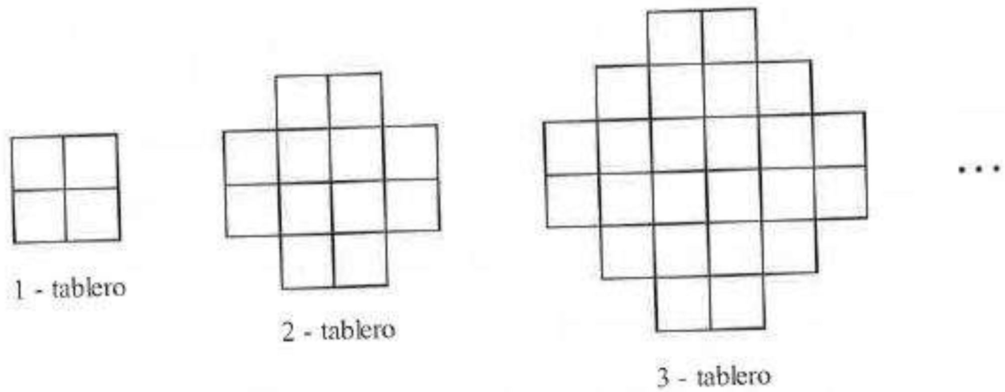
19ª Olimpíada Matemática Rioplatense

Primer Nivel

2. En cada casilla de un tablero rectangular de 4 filas y n columnas está escrito uno de los números $1, 2$ ó 3. Para cualesquiera tres columnas distintas hay una fila que corta a dichas columnas en tres casillas que contienen tres números distintos. Hallar el máximo n para el cual existe tal tablero.

3. Hay $2k$ cajas $(k \geq 2)$ con $2k-1$ piedras en cada una. Una movida legal es elegir $2k-2$ cajas y quitarle una piedra a cada una de ellas. Los jugadores A y B juegan alternadamente; comienza A. Un jugador gana si en una de sus jugadas logra vaciar dos cajas. Determinar qué jugador tiene estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

5. Consideremos la siguiente secuencia de tableros:



En cada casilla de un k–tablero hay un botón y un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. Cada vez que se presiona un botón cambian de estado (de apagado a encendido o de encendido a apagado) solamente los focos ubicados en las casillas vecinas a la casilla del botón presionado. Para cada valor de k, determinar el máximo número de focos que pueden quedar encendidos en el k–tablero después de presionar algunos botones.
NOTA: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

6. Se tienen dos números A y B, cada uno de 100 dígitos, formados exclusivamente por dígitos 4 y 7. La suma $A+B$ tiene 101 dígitos, de los cuales exactamente 20 son 4 y exactamente 30 son 9.
Determinar la cantidad de dígitos 1 que puede tener $A+B$.

Segundo Nivel

3. Sea $N \geq 4$ un entero fijo. Dos jugadores, A y B, escriben números en el pizarrón, un número a continuación del otro, con las siguientes reglas: A escribe $+1$ o -1; luego B escribe $+2$ o -2; en la jugada siguiente A escribe $+3$ o -3 y así sucesivamente, en la jugada k, el jugador que tiene el turno escribe $+k$ o $-k$. El objetivo de cada uno es que al cabo de una de sus jugadas la suma de algunos términos consecutivos de la expresión obtenida, tomados con sus signos, sea divisible por N. Para cada N determinar cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora, si es que hay alguno.

4. Hay 1000 puntos distintos sobre una circunferencia. Tenemos que seleccionar k de ellos de modo que no haya entre los elegidos dos adyacentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

5. En una hoja infinita de papel cuadriculado se han coloreado 999 cuadraditos de negro. Llamamos *especial* a un rectángulo con lados en la cuadrícula si tiene dos casillas negras en esquinas opuestas (se consideran también los rectángulos con uno de sus lados igual a 1). Sea N el máximo número de cuadraditos negros dentro de un rectángulo especial para una configuración dada. Hallar el mínimo de N sobre todas las configuraciones.

6. Sea n un entero positivo. Diremos que una sucesión de números enteros $a_1, a_2,\dots,a_k$, con $1 \leq a_i \leq n$, es suave si existe un entero m, con $1 \leq m < k$, tal que $a_1 = a_{k-m+1}$, $a_2 = a_{k-m+2}$,…, $a_m = a_k$. Además, diremos que la sucesión es universal si cada una de las sucesiones que se obtienen al reemplazar a_k por cada uno de los números $1, 2, \dots, n$ es suave. Para cada n hallar una sucesión universal de longitud mínima.

Tercer Nivel

3. Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $10^6 - 10^{-6} < \frac{x}{y} < 10^6 + 10^{-6}$.

6. Dos jugadores A y B juegan el siguiente juego. Inicialmente A ordena a su elección los números $1, 2, \dots, n$ en una fila; n es un entero positivo dado. A continuación, B elige un número y coloca una piedra sobre él. Luego A mueve la piedra a un número adyacente, luego B hace lo mismo, y así siguiendo. La piedra puede colocarse sobre el número k a lo sumo k veces, $k = 1, \dots, n$; la movida inicial de B se cuenta. El que no puede mover, pierde. Determinar, para cada n, quién tiene estrategia ganadora.

20ª Olimpíada Matemática Rioplatense

Primer Nivel

3. Cada casilla de un tablero cuadrado de 100×100 se pintó de algún color, de modo que ninguna línea (fila o columna) tiene más de 4 colores distintos. ¿Cuál es el máximo número de colores que se pudo haber usado?
Explicar por qué no es posible usar más colores y dar un ejemplo de coloración que use la cantidad máxima de colores.

6. Sea N un entero positivo. Se permite realizar las siguientes operaciones:

a) Multiplicar a N por algún entero positivo.
b) Si entre los dígitos de N ocurre el bloque 12345 de dígitos consecutivos, se borran estos 5 dígitos.

Demostrar que es posible, después de realizar algunas operaciones permitidas, obtener 0 a partir de cualquier N.

Segundo Nivel

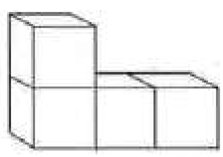
1. Los enteros positivos a, b, c, d, e, f satisfacen

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = de + ef + fd.$$

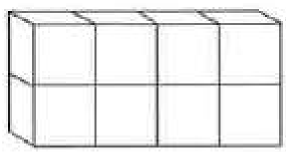
Demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$ es un número compuesto.

2. ¿Es posible ensamblar un cubo de $6 \times 6 \times 6$ en los siguientes casos?

a) Usando solamente fichas de la forma:



b) Usando solamente fichas de la forma:



5. Sea $N \geq 59$. Alrededor de una circunferencia hay escritos N números reales, no necesariamente positivos, cuya suma es 224. Cada 52 números consecutivos tienen suma mayor que 14; cada 59 números consecutivos tienen suma menor que 16. Hallar todos los valores posibles de N.

6. Un cubo Q de arista 2011 está dividido en 2011^3 cubitos unitarios mediante planos paralelos a sus caras. Consideramos todos los cubos compuestos por cubitos unitarios de Q. Se deben elegir algunos de ellos de modo tal que cada cara de cada cubito unitario esté contenida en la superficie de alguno de los cubos elegidos. ¿Cuál es la menor cantidad de cubitos que se deben elegir?

Tercer Nivel

3. Sea M un mapa formado por varias ciudades unidas unas con otras mediante vuelos. Decimos que hay una ruta entre dos ciudades si existe un vuelo sin escalas que une estas dos ciudades. Para cada ciudad a de M denotamos por M_a al mapa formado por las ciudades que tienen una ruta con a y por las rutas que unen estas ciudades entre sí (a no forma parte de M_a). Las ciudades de M_a se dividen en dos conjuntos de modo que el número de rutas que unen ciudades de distintos conjuntos sea máximo; llamamos a este número el corte de M_a. Supongamos que para todo a el corte de M_a es estrictamente menor que dos tercios del número de rutas de M_a. Demostrar que para cualquier coloración de las rutas de M con dos colores existen tres ciudades de M unidas por tres rutas del mismo color.

5. Una forma es la unión de rectángulos cuadriculados cuyas bases son segmentos unitarios consecutivos en una recta horizontal que deja a todos los rectángulos de un mismo lado, y cuyas alturas $m_1, \dots, m_n$ satisfacen $m_1 \geq \dots \geq m_n$. Un ángulo en una forma consiste de una casilla v y de todas las casillas a la derecha de v y todas las casillas arriba de v. El tamaño de una forma o de un ángulo es el número de casillas que contienen.
Hallar el máximo número de ángulos de tamaño 11 en una forma de tamaño 400.

6. Para un entero positivo n denotamos $\sigma(n)$ la suma de los divisores positivos de n y $\varphi(n)$ el número de enteros en $[0, n]$ que son coprimos con n. Determinar si el conjunto de los n tales que $\sigma(n)\varphi(n)$ es un cuadrado perfecto es finito o infinito.