



23ª Vingança Olímpica
25ª Semana Olímpica – Bento Gonçalves,
RS
25 de janeiro de 2024

- Não escreva mais de uma questão por folha.
 - Escreva seu nome em cada folha que usar.
-

Problema 1. Sejam M, α e β reais com $M \geq 0$ e $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Considere um real $R > 1$. Uma sequência de reais $\{C_n\}_{n \geq 1}$ é dita R – *inoceronte* se:

- $\sum_{i=1}^n R^{n-i} C_i \leq R^n M$ para todo $n \geq 1$

Determine o menor real $R > 1$ para o qual existe uma sequência R – *inoceronte* C_n tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n C_n^\alpha$ diverge.

Problema 2. Davi e George estão fazendo um city tour por Fortaleza, e Davi começa liderando. Fortaleza é uma cidade que se organiza como um tabuleiro $n \times n$. Eles escolhem em uma casa do $n \times n$ para começar, e eles podem se mover de uma casa para outra desde que ambas compartilhem uma aresta. Essa aresta é chamada de rua (Para cada 2 casas vizinhas no tabuleiro, há uma rua entre elas). Algumas ruas são perigosas. Se Davi e George passam por uma rua perigosa, eles ficam com medo e trocam quem lidera o city tour. O objetivo de ambos é passar por todas as casas de Fortaleza exatamente uma vez. Mas, se o city tour acaba com o George liderando, o mundo inteiro fica desempregado e todos morrem de fome. Dado que existe uma rua que não é perigosa, prove que Davi e George conseguem cumprir seu objetivo sem que todos morram de fome.

Problema 3. Seja $A_1 A_2 \cdots A_n$ um n –ágono cíclico de centro O , e P e Q dois conjugados isogonais do n –ágono. Seja P_i o centro de $A_i A_{i+1} P$ (índices módulo n), e Q_i o centro de $A_i A_{i+1} Q$. Prove que:

- a) $P_1 P_2 \cdots P_n$ e $Q_1 Q_2 \cdots Q_n$ são cíclicos, de centro O_P e O_Q .
- b) Prove que O, O_P e O_Q são colineares.
- c) $O_P O_Q \parallel PQ$.

Problema 4. Encontre todos os naturais n tais que

$$2n = \varphi(n)^{\frac{2}{3}} (\varphi(n)^{\frac{2}{3}} + 1)$$

Problema 5. Régis, Ed e Rafael estão na IMO em Bath. Há 2^n casas na cidade. Eles decidem jogar um jogo em que Régis e Ed jogam contra Rafael.

Primeiramente, Régis e Ed montam sua estratégia, a qual é de conhecimento de Rafael. A partir de então, Régis e Ed não se comunicam mais, e o jogo começa. A cada minuto, Rafael escolhe uma casa (ainda não visitada) para visitar e leva Régis para ela. Então, Régis escolhe um número entre 1 e n e coloca na casa. Ele faz isso em todas as casas para as quais foi levado, exceto a última. Na última casa a ser visitada, Rafael escolhe um número de 1 a n e coloca nela.

Feito isso, Ed vê todas as casas e os números que estão nelas. Seu objetivo é adivinhar qual foi a última casa a ser visitada, em até k chutes. Qual é o menor k tal que existe uma estratégia de Ed e Régis, de modo que Ed cumpra seu objetivo não importando as ações de Rafael?

Linguagem: Português

Tempo: 5 horas.
Cada problema vale 7 pontos.

Aviso: ordem da prova = ordem da OBM.