Coordenadas Baricêntricas e o P2 da IGO

Gabriel Torkomian

22 de janeiro de 2024

Fazer geometria é um caminho sem volta... e parece que ninguém escolheu esse caminho.

A ideia de abordar esse tema aqui nasceu depois de ver o desempenho do Brasil na IGO de 2023. Ter a triade de contas: coordenadas baricentricas, complexos e trigonometria é de muita importância e pode te salvar de muitos problemas complicados quando atacados apenas com geometria sintética. A união das ideias sintéticas com as contas é maravilhoso.

1 Definições Básicas

Definição 1. *No plano cartesiano, dados 3 pontos não colineares, A, B, C, existe uma única forma de escrever um ponto P qualquer do plano, onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e*

$$\overrightarrow{P} = x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B} + z\overrightarrow{C} \qquad x + y + z = 1$$

Denotaremos $P = (x, y, z)$ as coordenadas de P.

Nesse sentido, é fácil provar que, se considerarmos áreas direcionadas,

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[ABC]}, \frac{[PAB]}{[ABC]}\right)$$

Para além disso, vamos definir as coordenadas não homogênias do ponto P. Diremos que

$$P = (x : y : z) = (\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z})$$

onde, a soma das coordenadas do lado direito é 1, ou seja, é a coordenada baricêntrica padrão.

Definição 2. *Para dois pontos $P = (P_1, P_2, P_3)$ e $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ normalizados, definimos o vetor deslocamento*

$$\overrightarrow{PQ} = (P_1 - Q_1, P_2 - Q_2, P_3 - Q_3)$$

2 Fórmulas Gerais

Lema 1. *Sejam P_1, P_2, P_3 pontos no plano. Então,*

$$[P_1P_2P_3] = [ABC]\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

onde $P_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Lema 2. *A equação da reta é dada por*

$$ux + vy + wz = 0$$

onde $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Lema 3. *Dadas três retas* $u_i x + v_i y + w_i z = 0, \quad i = 1, 2, 3,$ *então elas são todas concorrentes - podendo ser no ponto do infinito - se, e somente se,*

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Lema 4. *Dado* $P = (x : y : z)$ *um ponto qualquer, então o seu conjugado isogonal é dado por*

$$P = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right)$$

Lema 5. *Sejam* P_1, P_2, P_3 *pontos no plano. Então,*

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

se, e somente se, P_1, P_2, P_3 *colineares, onde* $P_i = (x_i : y_i : z_i)$.

Lema 6. *A equação geral de um círculo é dada por*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0 \tag{1}$$

onde $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Para além disso, se $P = (x', y', z')$

$$Pot_\omega P = -a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y' + (x' + y' + z')(ux' + vy' + wz')$$

Disso, concluímos duas coisas bem interessantes. Se ω tem equação (1), então

$$u = Pot_\omega A, \qquad v = Pot_\omega B, \qquad w = Pot_\omega C$$

E, se Γ e Ω tem equações

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(u_1x + v_1y + w_1z) = 0$$

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(u_2x + v_2y + w_2z) = 0$$

Então, o eixo radical das circunferências é dado pela reta

$$(u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = 0$$

Lema 7. *Sejam* P, Q *pontos quaisqueres tais que* $\overrightarrow{PQ} = (x_1, y_1, z_1)$. *Então,*

$$|PQ|^2 = -a^2y_1z_1 - b^2z_1x_1 - c^2x_1y_1$$

E, se $\overrightarrow{RS} = (x_2, y_2, z_2)$*, então* $PQ \perp MN$ *se, e somente se,*

$$a^2(z_1y_2 + z_2y_1) + b^2(x_1z_2 + x_2z_1) + c^2(y_1x_2 + y_2x_1) = 0$$

Lema 8. *Aqui, vamos deixar as coordenadas de alguns pontos notáveis. Recomendo fortemente que todos se utilizem do ferramentário acima para concluir que essas, de fato, são as coordenadas dos pontos listados.*

$$O = (sen2A : sen2B : sen2C) = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

$$G = (1 : 1 : 1)$$

$$I = (a : b : c) \quad I_A = (-a : b : c) \quad I_B = (a : -b : c) \quad I_C = (a : b : -c)$$

$$K = (a^2 : b^2 : c^2)$$

$$H = (tgA : tgB : tgC) = ((c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) : (b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) : (a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2))$$

$$M = (a^2 : b(c-b) : c(b-c)) \qquad \text{ponto médio do arco } BAC.$$

3 Problemas

Tentei trazer problemas recentes. Exceto os da OBM que não me limitei a isso.

Os problemas com (*) são aqueles que não basta ir fazendo conta indefinidamente. São problemas que misturam sintética e contas. E que, as contas são de muito bom grado. Os que tem (**) são os que a sintética não é trivial (no meu ponto de vista, claro) ou nos quais a conta não é tão obvia.

Problema 1. ***(OBM 2015 - P1)*** *Seja* ABC *um triângulo escaleno e acutângulo e* N *o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja* D *a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de* ABC *e que passam por* B *e* C*. Prove que* A, D *e* N *são colineares se, e somente se,* $\angle BAC = 45$*.*

Problema 2. ***(OBM 2013 - P1)*** *Seja* Γ *um círculo e* A *um ponto exterior a* Γ*. As retas tangentes a* Γ *que passam por* A *tocam* Γ *em* B *e* C*. Seja* M *o ponto médio de* AB*. O segmento* MC *corta* Γ *novamente em* D *e a reta* AD *corta* Γ *novamente em* E*. Sendo* $AB = a$ *e* $BC = b$*, calcular* CE *em função de* a *e* b*.*

Problema 3. ***(OBM 2012 - P2)*** *Dado um triângulo* ABC*, o exincentro relativo ao vértice* A *é o ponto de interseção das bissetrizes externas de* $\angle B$ *e* $\angle C$*. Sejam* I_A, I_B *e* I_C *os exincentros do triângulo escaleno* ABC *relativos a* A, B *e* C*, respectivamente, e* X, Y *e* Z *os pontos médios de* I_BI_C*,* I_CI_A *e* I_AI_B *respectivamente. O incírculo do triângulo* ABC *toca os lados* BC, CA *e* AB *nos pontos* D, E *e* F*, respectivamente. Prove que as retas* DX*,* EY *e* FZ *têm um ponto em comum pertencente à reta* IO*, sendo* I *e* O *o incentro e o circuncentro do triângulo* ABC*, respectivamente.*

Problema 4. ***(OBM 2015 - P6)*** *Seja* ABC *um triângulo escaleno e* X, Y *e* Z *pontos sobre as retas* BC, CA, AB*, respectivamente, tais que* $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$*. Os circuncírculos de* BXZ *e* CXY *se cortam em* $P \neq X$*. Prove que* P *está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro* H *e no baricentro* G *de* ABC*.*

Problema 5. ***(IMO SL 2022 - G1)*** *Seja* $ABCD$ *um paralelogramo com* $AC = BC$*.Um ponto* P *é escolhido na semireta* $\overrightarrow{AB}$ *tal que* A, B, P *estão nessa ordem. O cirncuncírculo de* ACD *intersecta o* *segmento PD em D e Q. O circuncírculo de APQ intersecta o segmento PC em P e R. Prove que as retas CD, AQ, BR são concorrentes.*

Solução em [6]

Problema 6. ***(IMO 2019 - P2)*** *Em um triângulo ABC, A_1 está no lado BC e B_1 no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1, respectivamente, tais que $PQ \parallel AB$. Considere P_1 um ponto na reta PB_1 tal que P, B_1, P_1 estão nessa ordem e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Considere Q_1 um ponto na reta QA_1 tal que P, A_1, Q_1 estão nessa ordem e $\angle CQ_1Q = \angle CAB$. Mostre que P_1, Q_1, P, Q estão sobre uma mesma circunferência.*

Solução em [7]

Problema 7. ***(USA TSTST 2023 - P8)*** *Seja ABC um triângulo equilátero com lado de tamanho 1. Tome A_1 e A_2 no segmento BC, B_1 e B_2 no lado AC e C_1 e C_2 no segmento AB tais que $BA_1 < BA_2$, $CB_1 < CB_2$ e $AC_1 < AC_2$. Suponha que B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 concorram e que os perímetros dos triângulos $AB_2C_1, BC_2A_1, CA_2B_1$ sejam iguais. Ache todos os possíveis valores desse perímetro comum.*

Solução em [9]

Problema 8. ***(OBM 2013 - P6)*** *O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.*

Esse é um clássico, e está resolvido em [1].

Problema 9. *****(USEMO 2020 - P3)*** *Seja ABC umtriângulo acutângulo com circuncentro O e ortocentro H. Considere Γ o circuncírculo do triângulo ABC e N o ponto médio de OH. As tangentes à Γ por B e C e a reta por H perpendicular a AN determinam um triângulo com circuncírculo ω_A. Definimos ω_B e ω_C analogamente. Prove que o centro radical de $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ está em OH.*

Solução em [8]

Problema 10. *****(OBM 2014 - P6)*** *Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω. O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta $A1A2$. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYZ e I são colineares*

Solução em [10]

Referências

[1] `https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/coordenadas_baricentricas.pdf`

[2] Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads,
`https://web.evanchen.cc/geombook.html`

[3] `https://artofproblemsolving.com/community/c6h2965497p26563619` - Quidditch

[4] `https://artofproblemsolving.com/community/c5h3038296p27349297` - KevinYang2.71

[5] `https://artofproblemsolving.com/community/c5h3038303p27349354` - IAmTheHazard

[6] https://artofproblemsolving.com/community/c6h2882542p25627509 - Taco12

[7] https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2019-notes.pdf

[8] https://artofproblemsolving.com/community/q1h2317631p18471120 - MarkBcc168

[9] https://web.evanchen.cc/exams/sols-TSTST-2023.pdf

[10] https://artofproblemsolving.com/community/c6h612517p3642955 - william122