TREINAMENTO OLÍMPICO – NÍVEL 1 – ÁLGEBRA BÁSICA

Diante de diversos problemas de matemática futuros, você encontrará expressões apresentadas muitas vezes em forma de somas, de frações, de radicais. Muitas vezes, tornar essas expressões de somas em produtos pode ser algo bastante vantajoso. Além disso, em problemas de matemática mais complicados, uma estratégia a se seguir é encontrar padrões, repetições, simetria entre termos, objetos invariantes.

Nessa aula, você irá conhecer as expressões mais comuns em matemática, e criar estratégias para atacar quando outras menos comuns aparecerem. Seja em Teoria dos Números, em Combinatória, ou até mesmo no meio de um problema de Geometria, lidar bem com expressões algébricas será uma vantagem valiosa! Então, vamos ao treino!

1) PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

- ☐ Evidência: $(a+b)x = ax + bx$
- ☐ Agrupamento: $(a+b)(x+y) = ax + bx + ay + by$
- ☐ Produto de Stevin: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Nessas três técnicas, a propriedade usada é claramente a distributiva. Se essa fosse a necessidade, você poderia rapidamente deduzir as expressões da direita a partir da esquerda. Acontece que a grande utilidade aqui é: detectar o padrão nas expressões dadas nos exercícios, para então substituí-las pela forma fatorada.

Exemplo: $xy + 3x + 5y + 15 = x(y+3) + 5(y+3) = (x+5)(y+3)$.

A partir disso, podemos deduzir também as importantes fatorações que seguem.

- ☐ Quadrado da soma e da diferença:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- ☐ Diferença de quadrados:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- ☐ Cubo da soma e da diferença:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Observação: Destacam-se as duas formas de serem usadas as expansões dos cubos, porque em alguns momentos, o fator (a+b) ou (a-b) pode ser útil dentro de algum exercício. A partir disso também podemos deduzir a fatoração da Soma e Diferença de Cubos:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- ☐ Quadrado e Cubo da soma de três termos:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

2) TÉCNICAS ÚTEIS – FATORA QUE MELHORA

☐ Completar quadrados / retângulos: Há algumas vezes em que a expressão dada ou obtida parece não ter todas as parcelas que precisamos para efetuar o agrupamento, ou mesmo a expressão parece com algum quadrado perfeito, mas falta algo. A técnica de completar retângulos ou quadrados ajudará nesses casos!

Exemplo: Fatorar a expressão a^4+4b^4.

Sol.: Veja que essa expressão tem duas parcelas apenas! Apenas colocar em evidência algum fator não será possível. Além disso, ela é uma soma de dois quadrados perfeitos, o que lembra o quadrado da soma ou diferença. Apesar disso, falta o termo do meio, o "duas vezes o produto dos termos". Então, vamos completar o quadrado!

$$a^4+4b^4 = a^4+2\cdot a^2\cdot(2b^2)+4b^4-2\cdot a^2\cdot(2b^2) = (a^4+4a^2b^2+4b^4)-4a^2b^2$$
$$= (a^2+2b^2)^2-4a^2b^2 = (a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$$

Veja: adicionamos o termo $2\cdot a^2\cdot(2b^2)$, que é o que completa a expressão quadrada perfeita. Para não alterar o valor da expressão toda, também subtraímos. Assim, formou-se o quadrado perfeito, menos o termo $4a^2b^2$, que também é quadrado perfeito. Temos agora uma diferença de quadrados! Fatorando, temos o resultado esperado!

Exemplo: Quais soluções inteiras positivas tem a equação $mn+2m+3n=29$?

Sol.: Veja que, mesmo subtraindo 29 aos dois lados, o lado esquerdo não fatora por agrupamento: na verdade, parece que o lado esquerdo precisa de um +6 no final, para que o agrupamento aconteça! Então, vamos a isto:

$$mn+2m+3n+6 = 29+6$$

Agora podemos fatorar:

$$(m+3)(n+2) = 35$$

E o número 35 só pode ser escrito como os seguintes produtos: $35 = 1\cdot 35 = 5\cdot 7$

Como os fatores precisam ser maiores que 3 e 2, respectivamente, só obtemos duas soluções inteiras positivas para m e n: $(m=2, n=5), (m=4, n=3)$.

☐ Chama de letra: Quando você encara um problema com números muito grandes ou com expressões que muito se repetem, "chama de letra"! Troque o número grande, ou as expressões por uma mesma letra, sempre lembrando depois o que aquela letra está representando!!

Exemplo: Qual dos números é maior: $\frac{123456+10^{2019}}{123457+10^{2019}}$ ou $\frac{123458+10^{2019}}{123459+10^{2019}}$?

Outro exemplo: Resolva $x^2-7x+9 = \frac{3}{x^2-7x+7}$.

☐ Simetria é harmonia: Alguns problemas vêm com as informações bem organizadinhas, mantendo uma espécie de simetria. Termos em ordem crescente, com um "meio" bem definido, coeficientes de uma expressão "espelhados"... Tente aproveitar a simetria a seu favor.

Essa observação, junto com outras técnicas, pode ser bem útil para diminuir o trabalho braçal, ou mesmo a confusão que o problema pode se tornar quando a simetria não é aproveitada.

Exemplo: Calcule o valor de $\sqrt{224 \times 225 \times 226 \times 227 + 1}$

- ☐ Distributiva inteligente: É comum um vício de aplicar a distributiva termo a termo em expressões gigantes, sem pensar muito no que vem pela frente – normalmente vem confusão e caos pela frente... Em alguns momentos, as duas técnicas anteriores em conjunto podem te ajudar a fazer a "distributiva inteligente", que é uma maneira organizada de expandir produtos.

Exemplo: Fatore $E = (a^2 + 3a + 3)(a^2 + 3a + 5) - 15$

- ☐ Quebrando parcelas: Normalmente, para fazer o agrupamento dar certo, precisamos de um número composto de parcelas (normalmente são quatro, mas às vezes faremos com seis, oito, nove parcelas...). Em algumas ocasiões, as parcelas vêm juntas numa só, e, para efetuarmos o agrupamento, teremos que dividir algumas delas.

Exemplo: Fatore $2x^2 + 7xy + 12y^2$

- ☐ Adivinhar raízes: Se você tiver uma expressão da qual você já conhece uma das raízes, existe o seguinte teorema: se $x = a$ é raiz, então $(x - a)$ é fator da expressão em x. Para te ajudar, existe mais um resultado útil, que vira técnica importante: o "Teorema da Raiz Racional", que diz que se um polinômio da forma $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + ux + v$ tem alguma raiz racional da forma $\frac{p}{q}$, então $v|p$ e $a|q$. Ou seja, os candidatos a raízes da expressão são os divisores de v, divididos pelos divisores de a.

Exemplo: Fatore $2x^3 + 5x^2 - x - 1$

3) RESULTADOS ÚTEIS E IMPORTANTES

- ☐ $x^2 \geq 0$: se x é real então x^2 é um número não-negativo. Esse fato é bem óbvio, mas leva a resultados extremamente interessantes, como você verá nos exercícios resolvidos.
- ☐ Média Aritmética ≥ Média Geométrica: Para números positivos, vale que a média aritmética deles é maior ou igual à média geométrica. A igualdade só vale quando todos os números são iguais entre si.

Por exemplo, a desigualdade das médias para dois termos pode ser escrita assim:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Para três termos:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

- ☐ ABC do Michael Jackson: se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- ☐ Lema de Gauss: "se um polinômio de coeficientes inteiros pode ser fatorado nos racionais, então ele também pode ser fatorado nos inteiros".

Isso quer dizer que, no seu rascunho, você deve supor que os coeficientes dos fatores do polinômio são inteiros, porque, se não forem, serão irracionais, e será difícil encontrá-los.

Exemplo: Fatorar a expressão $x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3$.

☐ Diferença de Potências:

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

☐ Soma de Potências de expoente ímpar: se k for ímpar, vale:

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + \cdots - ab^{k-2} + b^{k-1})$$

Perceba que deve haver alternância de sinais, e o último sinal da soma grande deve ser "+" também.

4) EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva a equação a seguir:

$$(x+2)(x-3)(x-1)(x^2+3x-2) = (x+2)(x-1)(x-3)(x^2+8x+3)$$

2. Sejam dois números positivos x e y tais que $x^2 + y^2 = 20$ e $xy = 2$. Calcule a diferença entre o maior e o menor desses números.
3. Seja a um número real diferente de zero, com $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 5$. Calcule o valor de $a^3 + \frac{1}{a^3}$
4. (OBM) Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \cdot 20112007$?
   a) $2 \cdot 20112007^2$ b) $2 \cdot 20112003^2$ c) $2 \cdot 20112007$

   d) $2 \cdot 20112003$ e) $2 \cdot 20112011^2$

5. Fatore as expressões abaixo:

a) $a^2 + 7a + 12$
b) $x^2 - (1+ab)x + ab$
c) $a^2 - 10a + 25$
d) $a^2 + 12a + 36$
e) $a^2 + 13a + 36$
f) $x^2 - 16y^2$
g) $x^4 - 1$
h) $x^4 - 18x^2 + 81$
i) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$
j) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
k) $x^3 - 27$
l) $a^3 + 8$
m) $a^5 + a^3 - a^2 - 1$
n) $a^4 + 2a^3 - 2a - 1$
o) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$
p) $4a^4 + 5a^2 + 1$
q) $2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2$
r) $a^3 + a - 2$
s) $a^4 + a^2 + 1$
t) $a^6 + 1$
u) $a^6 - 1$
v) $a^3(a^2 - 7)^2 - 36a$

6. Simplifique a expressão a seguir:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

7. Dado que $x > y > 0$ e $x^2 + y^2 = 6xy$, determine o valor de $\frac{x+y}{x-y}$.

8. Calcule $\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$

9. Determine x real tal que:
   a) $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$
   b) $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$
10. (OBM) Quantos ternos de números reais (x, y, z) satisfazem o sistema abaixo?

$$\{x(x+y+z) = 2005\ y(x+y+z) = 2006\ z(x+y+z) = 2007$$

11. Sabendo que $x + y + z = 0$, com x, y, z não nulos, calcule o valor da expressão a seguir:

$$\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(z+x)^2} + \frac{z^2}{(x+y)^2}$$

12. Prove que o número $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ é um número inteiro.
13. Prove que o número $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ é um número inteiro.
14. Mostre que, se a é um número real positivo, então $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

5) OUTROS PROBLEMAS DIFÍCEIS

15. Prove que, para qualquer n natural, $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por 120.
16. Prove que, para qualquer n natural, $2n^3 + 3n^2 + n$ é divisível por 6.
17. Fatore $a^4 + 4$
18. Prove que, se $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 = 4(ab + bc + cd)$, então $a = b = c = d$.
19. Calcule $\sqrt{100 \cdot 102 \cdot 104 \cdot 106 + 16}$
20. Prove que, se x, y, z são números reais não-nulos tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$, então vale que $\frac{1}{x^{2019}} + \frac{1}{y^{2019}} + \frac{1}{z^{2019}} = \frac{1}{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019}}$.
21. (OBM) Sendo a, b, c reais tais que

$$ab(a+b+c) = 1001$$

$$bc(a+b+c) = 2002$$

$$ac(a+b+c) = 3003$$

Determine abc.

22. (OBM) Determine todos os pares de inteiros (x,y) tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$
23. Simplifique a expressão $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$
24. Prove que, sendo x, y, z números distintos, vale que:

$$\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0$$

25. Mostre que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, para todos a,b,c reais.
26. Prove que, para a, b, c>0, temos $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$
27. Mostre que $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$
28. Para quais valores de n a expressão $n^4 + 4^n$ é um número primo? Justifique.

29. Resolva

$$\frac{3xy}{x+y} = 2$$

$$\frac{4yz}{y+z} = 3$$

$$\frac{5zx}{z+x} = 6$$

30. Resolva

$$x^2 + 2x = y - \frac{1}{4}$$

$$y^2 + 2y = z - \frac{1}{4}$$

$$z^2 + 2z = x - \frac{1}{4}$$

BIBL) MAIS SOBRE ÁLGEBRA BÁSICA

Separei essa parte para que você saiba boas fontes de onde tirei a maioria dos problemas, que consultei pra formar esse material, e que você poderá consultar para estudar mais sobre, não só álgebra de expressões, mas álgebra como um todo! Em alguns casos, as fontes são difíceis de entender, e esse é um motivo para você sentir o calor do desafio! Você é medalhista, já superou muitos desafios até aqui, certamente irá derrubar muitos obstáculos que virão pela frente! Confie no coração das cartas, mostre o seu poder de luta!

- ☐ Site www.mathlinks.ro
- ☐ Livro Mathematical Olympiad Treasures, dos autores Titu Andreescu e Bogdan Enescu, ed. Birkhäuser [pgs. 60 até 64]
- ☐ Livro Solving Problems in Algebra and Trigonometry, dos autores V. Litvinenko e A. Mordkovich
- ☐ Livro Putnam and Beyond, dos autores Titu Andreescu e Razvan Gelca

Epílogo:

Parabéns por essa conquista na Olimpíada Brasileira de Matemática! Que o prêmio que você irá receber nessa Semana Olímpica seja muito mais do que medalhas e aulas maneiras, que esse momento seja de muito aprendizado, de muita diversão, mas, principalmente, de muita inspiração para seus próximos desafios e objetivos, que ainda virão aos montes, não necessariamente com Matemática.

Ser um medalhista mostra que você tem destaque, não só pela habilidade com números e lógica, como também garra para aprender coisas novas, e brio para derrubar barreiras que te enfrentem!

Novamente, parabéns pelo brilhantismo, e que o seu poder cada vez aumente mais! OSU!!