Aprendendo a Marcar Ângulos

Yvens Ian

27ª Semana Olímpica - 24 de janeiro de 2024

1 Introdução

Na maioria dos problemas de geometria, há duas partes indispensáveis, fazer um bom desenho e marcar ângulos! Nesse material, focarei na segunda parte, mas falarei brevemente sobre a primeira a seguir.

É extremamente importante que todos os alunos de olimpíada saibam desenhar **com régua e compasso** seus problemas de geometria. Então, treinem bastante, desenhem várias figuras até pegar o jeito, e façam problemas clássicos de desenho geométrico, recomendo o aplicativo Euclidea, que propõe vários desses.

Outro aplicativo importantíssimo é o Geogebra, que permite a construção de figuras perfeitas de forma rápida. Ele te ajuda a construir uma boa intuição geométrica, por exemplo, o que acontece ao movimentar pontos da figura, quais pontos parecem concíclicos, quais parecem colineares, etc. Porém, é de **extrema importância** que também sejam usados régua e compasso para estudar geometria, afinal, você não terá o desenho perfeito do Geogebra na hora da prova.

Voltando ao tema principal do material, ângulos são uma parte fundamental da resolução da maioria dos problemas de geometria, tanto em questões fáceis, quanto em extremamente difíceis. Em qualquer caso, sempre é bom marcar os ângulos de uma figura. Mas não exagere! Sua figura deve sempre estar legível, de nada adianta se não der para entender o que acontece no problema.

Nas olimpíadas, costumamos chamar o processo de marcação de ângulos de **arrastão**, e não se engane, arrastões nem sempre são fáceis de ver, tendo em vista que certos ângulos só podem ser marcados por meio de quadriláteros cíclicos, semelhanças, congruências, etc.

2 Arrastando os Ângulos

Em geral, no arrastão, nomeamos um certo ângulo da figura, a princípio desconhecido, de α, por exemplo, e com isso utilizamos nossas ferramentas de marcação para encontrar o valor de outros ângulos da figura em função desse! Por exemplo, quando temos um triângulo ABC, geralmente dizemos que seus ângulos são $\angle A, \angle B, \angle C$, e encontramos os ângulos que queremos com base nesses. Claro, sabemos que $A+B+C = 180°$, então, não precisamos das 3 variáveis, por exemplo, podemos substituir $\angle C$ por $180° - \angle A - \angle B$, porém, existem problemas nos quais é melhor usar as 3 variáveis, por uma questão de simetria, mas isso é melhor compreendido com treino.

Vamos, então, apresentar a seguir as principais ferramentas usadas para marcar ângulos.

Ferramentas

- Sejam A, B, C pontos colineares, nessa ordem, e P um ponto qualquer no plano, então, $\angle PBA + \angle CBP = 180°$.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
- Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais.
- Dadas duas retas paralelas e uma transversal, os ângulos alternos são iguais.
- Triângulos semelhantes (e em particular, congruentes) têm ângulos correspondentes iguais.
- Quadriláteros inscritíveis (ou cíclicos) têm várias propriedades interessantes de ângulos, que serão listadas a seguir.

3 Ângulos na Circunferência

Vocês já viram uma aula anterior só sobre isso, mas vou deixar aqui as propriedades, tendo em vista que são bem importantes.

Teorema 1 (ângulo inscrito) Se $\angle ACB$ é um ângulo inscrito em uma circunferência de centro O, então, $\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$.

Corolário 1 Todos os ângulos inscritos que olham para um mesmo arco têm o mesmo valor.

Corolário 2 Ângulos inscritos que olham para arcos opostos têm valores que somam 180°.

Teorema 2 (ângulo de segmento) Sendo ABC um triângulo inscrito em uma circunferência ω e P um ponto exterior tal que P e A estão em semiplanos distintos em relação à reta BC. PC é tangente à ω se, e somente se, $\angle BCP = \angle BAC$.

Teorema 3 (quadriláteros cíclicos) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P o encontro de suas diagonais e Q o encontro de AD e BC. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $ABCD$ é cíclico.

ii) $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.

iii) $\angle ABD = \angle ACD$.

iv) $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

v) $QA \cdot QD = QB \cdot QC$.

4 Colinearidade

Essa sessão pode ser um pouco redundante com a primeira ferramenta na visão de alguns, mas é importante reforçar esse contexto levemente diferente. É bem comum querermos provar colinearidade em problemas de geometria, e uma boa forma de fazer isso é com ângulos, utilizando a volta da primeira ferramenta.

Teorema 4 Os pontos A, B, C são colineares, nessa ordem, **se, e somente se**, $\angle ABC = 180°$.

Corolário 3 Seja P um ponto no plano. Os pontos A, B, C são colineares, nessa ordem, **se, e somente se**, $\angle PBA + \angle CBP = 180°$.

Teorema 5 Os pontos A, B, C são colineares, nessa ordem, **se, e somente se**, $\angle BCA = 0°$.

Corolário 4 Seja P um ponto no plano. Os pontos A, B, C são colineares, nessa ordem, **se, e somente se**, $\angle PCB = \angle PCA$.

5 do Fim ao Início?

Em vários problemas, não só os de geometria, temos que começar do fim dele para encontrarmos onde começar. Talvez pareça um pouco estranho, mas é bem intuitivo!

Em geral, olhamos para o que o problema nos pede, o que queremos provar, e encontramos vários fatos correlacionados a esse final, por exemplo, "se o final está certo, então algo é verdade", ou, "para o final estar certo, é **necessário** que tal fato ocorra", em qualquer desses casos, conseguimos extrair informações do fim do problema, mesmo sem saber como chegar lá, de forma que talvez encontremos onde começar a partir disso.

6 Graus de Liberdade

Aqui, chegamos em um conceito um pouco mais avançado. Não se preocupe em compreender completamente agora, essa parte requer mais treino, e em matérias futuras, como trigonometria, será mais utilizada.

Sempre é bom saber quantas variáveis você deve colocar em sua figura. Em um problema normal, não colocamos todo o alfabeto grego de ângulos diferentes. A maioria das pessoas adiciona novas variáveis quando não conseguem encontrar, em função das já escolhidas, o valor do que estão procurando. Isso é bom, e provavelmente vai resolver os problemas mais simples... mas como você sabe se pode ou não encontrar um valor para esse ângulo, e deve adicionar uma nova variável? Como saber quais ângulos formam a "base" da figura? É aqui que pensamos nos graus de liberdade!

Essencialmente, um problema olímpico de geometria possui uma certa quantidade de parâmetros que podem ser selecionados, de forma a deixar o resto unicamente determinado, e são esses que dizemos ser os graus de liberdade. Pense no desenho que você está fazendo, alguns pontos são desenhados aleatoriamente no plano, enquanto outros são definidos a partir desses que você já desenhou. Por exemplo, um triângulo qualquer no plano é definido por três parâmetros, 3 lados, 2 lados e 1 ângulo ou 1 lado e 2 ângulos, portanto, dizemos que possui três graus de liberdade, já o ponto médio de dois pontos dados é unicamente definido, então não possui graus de liberdade. Dessa forma, quanto mais pontos "genéricos" você adicionar, mais graus de liberdade terá!

Isso significa que se você possui n graus de liberdade, terá n informações "soltas". Uma dessas informações sempre é uma medida de lado, pois, caso contrário, a figura poderia ser aumentada ou diminuída, mas, na maioria das vezes, podemos definir todas as outras $n-1$ como ângulos! Assim, **toda** informação sobre ângulos (e lados) podem ser encontradas em função desses $n-1$ ângulos (e 1 lado).

Nem tudo é um mar de rosas. Se queremos encontrar um ângulo em função desses $n-1$, nem sempre ele será "bonito", mas com certeza pode ser determinado, por exemplo, com funções trigonométricas, mas isso fica pro futuro!

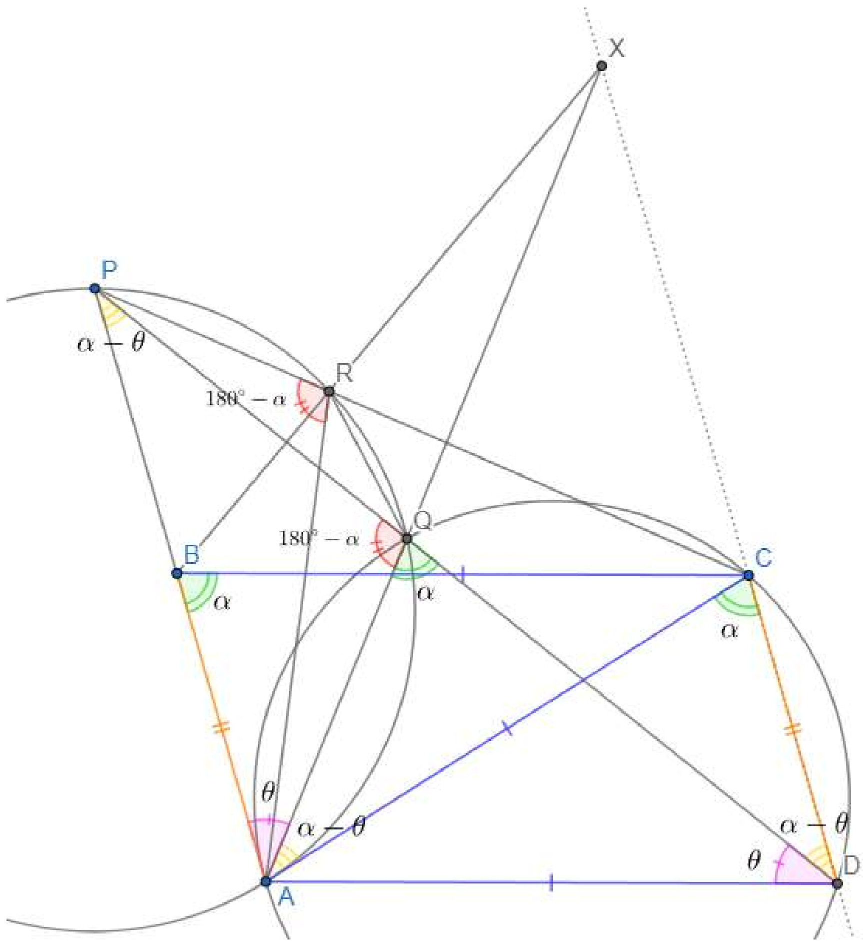
Lembrando que graus de liberdade é algo que será aperfeiçoado com o treino, principalmente quando forem aprender a usar trigonometria a fundo, mas quis colocar aqui, pois esse conceito é importante para saber quando ângulos são determináveis ou não.

7 Exemplos

Exemplo 1 (IMO SL - 2021) Seja $ABCD$ um paralelogramo onde $AC = BC$. Um ponto P é escolhido na extensão da semirreta AB por B. O circuncírculo de ACD encontra o segmento PD novamente em Q. O circuncírculo do triângulo APQ encontra o segmento PC em R. Prove que as retas CD, AQ, BR concorrem.

Sol. Vamos começar o problema desenhando a figura. Fazemos o triângulo isósceles ABC, e depois completamos o paralelogramo com o ponto D, unicamente definido. Após isso, escolhemos um ponto P em $\overrightarrow{AB}$, e completamos o desenho assim como dito no enunciado.

Vamos escolher os ângulos! Temos 3 graus de liberdade, dois do triângulo isósceles e um da escolha de P. Dessa forma, escolhemos inicialmente dois ângulos, na minha opinião, as melhores opções são $\angle ABC = \angle CAB = \alpha$ e $\angle PDA = \theta$. Marcando os ângulos, com as circunferências e paralelas, temos a seguinte figura:



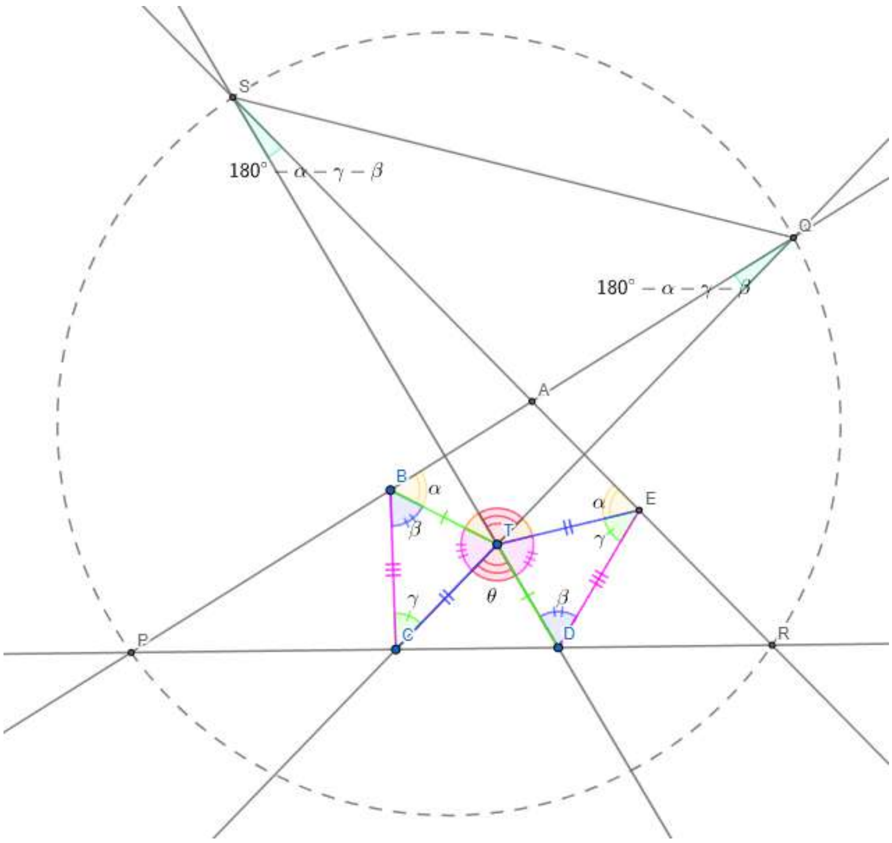
Vamos olhar, então, para onde queremos chegar. Queremos mostrar que BR, AQ e CD concorrem, mas não temos ferramentas muito boas para isso, então podemos transformar essa concorrência em colinearidade. Suponha que as retas BR e AQ se encontrem em X, nosso objetivo seria mostrar que X, C, D são colineares! Perceba, que como $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$, basta mostrarmos que $\angle XCB = \alpha = \angle ABC$, ou seja, que $XC \parallel AB$.

Pelo quadrilátero $APRQ$, vemos que $\theta = \angle QAP = \angle QRC$, e para $XC \parallel AB$, precisamos que $\theta = \angle QAP = \angle QXC$, dessa forma, concluímos que basta provar que $\angle QRC = \angle QXC$, ou seja, que $QRXC$ é cíclico! Para isso, precisamos que $\angle CQX = \angle CRX$, mas pelo quadrilátero $DAQC$, $\angle CQX = \angle CDA = \alpha$, então, precisamos que $\angle CRX = \angle CAB = \alpha \iff ABRC$ é cíclico. Por fim, para isso, precisamos que $\alpha = \angle ABC = \angle ARC$, mas, isso é claro pela marcação inicial!

Exemplo 2 (IMO 2022) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $BC = DE$. Suponha que exista um ponto T dentro de $ABCDE$ onde $TB = TD, TC = TE$ e $\angle ABT = \angle TEA$. A reta AB intersecta as retas CD e CT nos pontos P e Q, respectivamente. Assuma que os pontos P, B, A, Q aparecem nessa ordem na reta. A reta AE intersecta CD e DT nos pontos R e S, respectivamente. Assuma que os pontos R, E, A, S aparecem nessa ordem na reta. Prove que os pontos P, S, Q, R pertencem à mesma circunferência.

Sol. Primeiro, temos que saber como desenhar a figura. Veja que não precisamos fazer na ordem dita no enunciado, podemos escolher a forma mais fácil de desenhar. Eu considero que a forma mais simples é começar por T, fazer dois triângulos congruentes por esse ponto, TBC e TDE, depois escolher um ponto A que satisfaz as condições de ângulos, e por fim desenhar os pontos restantes, que estão bem definidos.

Bom, agora é hora de marcar os ângulos, mas primeiro, vamos definir quais os ângulos base. Primeiro, veja que temos 5 graus de liberdade, 3 do triângulo TBC, 1 do ângulo entre os triângulos TBC e TDE, e mais 1 dos ângulos $\angle ABT = \angle TEA$, então, chamarei $\angle ABT = \angle TEA = \alpha$, $\angle TBC = \angle TCE = \beta$, $\angle BCT = \angle DET = \gamma$ e $\angle DTC = \theta$. Marcando os ângulos principais da figura, temos o seguinte,



Veja que não há como marcar o ângulo $\angle TCD$ de uma forma boa, e por consequência, o ângulo $\angle QPR$, mas lembre-se que certamente ele é calculável, com outras técnicas, pelo menos. Vamos chamar, então, $\angle QPR = \rho$, assim, como queremos que $PRQS$ seja cíclico, precisamos que $\angle QSR = \rho \iff \angle QSD = 180° + \rho - \alpha - \beta - \gamma$, porém, $\angle QCR = \angle QPR + \angle CQP = 180° + \rho - \alpha - \beta - \gamma$. Dessa forma, para que $PRQS$ seja cíclico, devemos mostrar que $CDQS$ é cíclico.

Para mostrar $CDQS$ cíclico, basta mostrar que $TD \cdot TS = TQ \cdot TC \iff \frac{TD}{TQ} = \frac{TC}{TS} \iff \frac{TB}{TQ} = \frac{TE}{TS}$, mas veja que $TSE \sim TQB$, pelos ângulos, logo, está provado!

8 Problemas

8.1 Lemas Conhecidos

A partir daqui, chamaremos o círculo circunscrito de um triângulo ABC de (ABC).

Problema 1 Seja ABC um triangulo retângulo em A. Prove que seu circuncentro é o ponto médio de BC.

Problema 2 Mostre que um trapézio é isósceles se, e somente se, ele é cíclico.

Problema 3 Sejam O e H o circuncentro e o ortocentro de um triângulo acutângulo ABC, respectivamente. Mostre que $\angle BAH = \angle CAO$.

Problema 4 Seja ABC um triângulo de ortocentro H, de forma que D, E, F são os pés das alturas relativos aos vértices A, B, C. Mostre que H é o incentro do triângulo DEF.

Problema 5 Seja ABC um triângulo de ortocentro H e M o ponto médio do lado BC. Seja X o reflexo de H sobre BC e Y o reflexo de H por M.

a) Mostre que X e Y pertencem a (ABC).

b) Mostre que AY é diâmetro de (ABC).

Problema 6 Seja ABC um triângulo de incentro I e N a interseção da reta AI com (ABC). Além disso, seja I_A o A-exincentro de ABC. Mostre que $BICI_A$ é um quadrilátero cíclico de centro N.

Problema 7 Seja ABC um triângulo e D, E, F pontos nos lados BC, CA, AB, respectivamente. Mostre que existe um ponto pertencente às circunferências $(AEF), (BFD), (CDE)$. Esse ponto é chamado de **ponto de Miquel** do triângulo.

Problema 8 Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Defina $P = AD \cap BC, Q = AB \cap DC$, então, os circuncírculos $(PAB), (PDC), (QAD), (QBC)$ passam por um mesmo ponto M. Esse ponto é chamado de **ponto de Miquel** do quadrilátero.

Problema 9 Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam BE e CF alturas de ABC, e seja M o ponto médio de BC. Mostre que ME, MF e a reta por A paralela a BC são tangentes a (AEF).

Problema 10 Seja ABC um triangulo e P um ponto em (ABC). Sejam X, Y, Z os pés das perpendiculares de P às retas BC, CA e AB. Mostre que X, Y, Z são colineares.

8.2 Problemas

Problema 11 Em um quadrilátero cíclico $ABCD$, sejam I_1 e I_2 os incentros de ABC e DBC, respectivamente. Mostre que I_1I_2BC é cíclico.

Problema 12 (CGMO 2012) Seja ABC um triângulo. O incírculo de ABC é tangente a AB e AC em D e E, respectivamente. Seja N o centro de (BCI). Mostre que $\angle ODB = \angle OEC$.

Problema 13 (OBM 2020) Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intersecta o segmento DC em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se $\angle BAE = 45°$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.

Problema 14 (OBM 2019) Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Seja E o simétrico de D em relação a AC e seja F o simétrico de D em relação a AB. A reta ED intersecta a reta AB em G, enquanto a reta FD intersecta a reta AC em H. Prove que os pontos A, E, F, G e H estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 15 (OBM 2016) Considere um triângulo escaleno ABC com $AB < AC < BC$. A mediatriz do lado AB corta o lado BC no ponto K e o prolongamento de AC no ponto U. A mediatriz do lado AC corta o lado BC no ponto O e o prolongamento do lado AB no ponto G. Prove que o quadrilátero $GOKU$ é cíclico.

Problema 16 (Teste Cone Sul 2023) Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito em um círculo e o comprimento do lado AD é igual a soma dos comprimentos dos lados AB e CD. Prove que as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ se intersectam em um ponto sobre o lado AD.

Problema 17 (JMO 2011) Os pontos A, B, C, D, E pertencem a uma circunferência ω e seja P um ponto fora dela. Os pontos são dados de forma que PB e PD são tangentes a ω, P, A, C são colineares e $DE \parallel AC$. Mostre que BE corta AC em dois segmentos de mesmo tamanho.

Problema 18 (Hong Kong 1998) Seja $PQRS$ um quadrilátero cíclico onde $\angle PSR = 90°$. Tome H, K como os pés das perpendiculares de Q aos lados PR e RS. Mostre que HK corta SQ em dois segmentos iguais.

9 Conclusão

Chegamos ao fim desse material, mas é só o começo para vocês, há muito mais o que aprender e entender. Lembrem-se que a matemática é sobre treino, não adianta saber uma técnica se não treinar fazendo problemas. De nada te ajuda aprender a marcar ângulos, mas não saber usar isso ao seu favor!

Além do mais, aos que quiserem mais problemas sobre o assunto, ou provas parecidas com OBM N2, recomendo olhar o site `artofproblemsolving.com/community/c62_junior_olympiads`. Geralmente os problemas de geometria das olimpíadas júnior, principalmente os problemas 1, são sobre marcação de ângulos.

Por fim, se quiserem me contatar, meu e-mail é yvensianpporto@gmail.com.