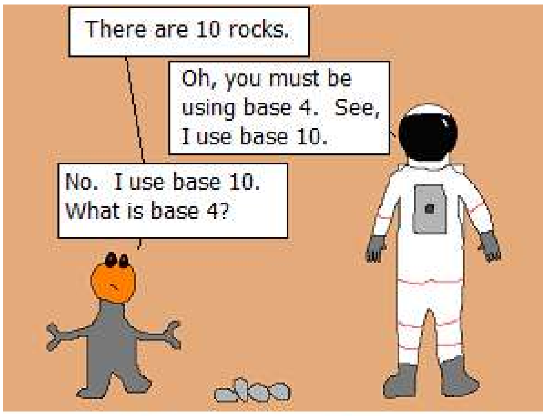
"A MAGIA DAS BASES NUMÉRICAS E AS BASES NUMÉRICAS DA MAGIA"

PROF.LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO
lucianogmcastro@gmail.com

Um sábio disse um dia: "Existem 10 tipos de pessoas no mundo, as que entendem binário e as que não entendem".



Every base is base 10.

Como mostram os 10 exemplos acima, bases numéricas são ótimas para o humor matemático, mas também têm outras aplicações.

1. Dado o inteiro positivo $b > 1$, prove que qualquer inteiro positivo n pode ser representado de maneira única na base b, ou seja, existem inteiros $m > 0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$, únicos para cada n, tais que

$$n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_{m-1} b^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k b^k,$$

e $0 \leq a_k \leq n - 1$, para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

Obs: Neste caso, usaremos a notação $n = (a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_b$. Por exemplo, $(1234)_5 = 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 194$.

2. Os números a seguir estão escritos na base 10. Escreva cada um deles nas bases 2, 7 e 12.

(a) 2021

(b) 100000

(c) 4096

(d) 248831

3. O número $0,2$ está escrito na base 10. Escreva-o na base 7.

4. Calcule $\sqrt{(61)_8}$.

5. É comum usar a base 16 (hexadecimal) para aplicações computacionais. Os algarismos utilizados são os inteiros de 0 a 15, fazendo-se as substituições $A = 10$, $B = 11$, $\ldots$, $F = 15$. Considere o número hexadecimal $n = (107DAF)_{16}$. Determine

(i) os restos obtidos na divisão de n por 16 e por 256.

(ii) a representação de n na base 4.

6. O truque de mágica "Adivinhe a idade (até 63 anos)".

O jogo é composto por 6 cartões que a princípio parecem conter números aleatórios. Estes cartões são entregues a uma pessoa, você pede que ele separe os cartões que possuem a idade desta pessoa registrada nele. Depois você recolhe os cartões separados pela pessoa e diz que vai adivinhar a idade desta pessoa. Você realiza mentalmente o cálculo envolvido no experimento e diz exatamente a idade dela. Como isso é possível?

7. João vende legumes na feira, e para pesá-los utiliza uma balança de dois pratos junto com um conjunto de pesos graduados. Ele tem quatro pesos de 10g, um peso de 50g, quatro pesos de 100g, um peso de 500g e quatro pesos de 1kg, com os quais consegue medir até 4990g em intervalos de 10g. Observe que o conjunto de pesos de João tem um total de 14 elementos. Seu amigo Joaquim utiliza um método mais eficiente, e com um conjunto de apenas 10 pesos ele consegue medir, em intervalos de 10g, até mais de 10kg. Manuel, também feirante e amigo dos dois, percebeu que era possível ser ainda mais eficiente: ao invés de colocar o objeto a ser pesado em um dos pratos da balança e os pesos graduados em outro, ele utiliza pesos graduados nos dois pratos da balança, juntamente com o objeto a ser pesado. Assim, com um conjunto de apenas 7 pesos Manuel consegue medir até mais de 10kg, em intervalos de 10g. Explique como isso é possível.

8. Consideremos uma sequência infinita $x_1, x_2, \ldots$ de números inteiros positivos tais que, para todo inteiro $n \geq 1$:

- Se x_n é par, então $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$;
- Se x_n é ímpar, então $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2} + 2^{k-1}$, onde k é o inteiro tal que $2^{k-1} \leq x_n < 2^k$.

Determine o menor valor possível de x_1 para o qual a sequência contenha algum termo igual a 2020.

9. Considere a função f, com domínio e contradomínio no conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(1) = 1$$
$$f(2n+1) = f(2n) + 1$$
$$f(2n) = 3f(n).$$

Determine a imagem da função f.

10. É possível selecionar 1983 inteiros não negativos distintos, menores que ou iguais a 10^5, de forma que não existam 3 entre eles que formem uma progressão aritmética?

Obs: 3 números a,b,c, nesta ordem, formam uma progressão aritmética quando $a + c = 2b$.

11. Doze pintores vivem em 12 casas pintadas de azul ou vermelho e dispostas ao redor de uma rua circular. Cada mês, um dos pintores percorre as casas no sentido antihorário e, começando pela sua própria, vai repintando as casas seguindo a seguinte regra: se a casa é vermelha, ele a pinta de azul e continua; se a casa é azul, ele a pinta de vermelho e volta pra casa sem pintar mais nada. Cada pintor faz isso uma vez por ano. Prove que se pelo menos uma casa é inicialmente vermelha, após um ano todas as casas terão sua mesma cor inicial.

12. Seja p um primo ímpar. A sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ é definida por: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $\ldots$, $a_{p-2} = p - 2$ e, para todo $n \geq p - 1$, a_n é o menor inteiro maior que a_{n-1} que não forma uma progressão aritmética de tamanho p com quaisquer dos termos precedentes. Prove que, para todo n, a_n é o número obtido escrevendo-se n na base $p - 1$ e lendo-o na base p.

13. Determine se existe alguma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n$ e $f(n) < f(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ é o conjunto dos inteiros positivos).

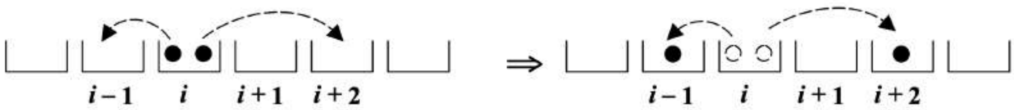
14. (OBM 2001)

Temos uma fileira longa de copos e n pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo A

Se há pelo menos uma pedra no copo i e pelo menos uma no copo $i+1$ podemos fazer uma pedra que está no copo $i+1$ pular para o copo $i-1$ eliminando uma pedra do copo i.

Movimento tipo B.



Se há pelo menos duas pedras no copo i podemos pular uma para o copo $i+2$ e uma outra para o copo $i-1$.

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegaremos a uma configuração a partir da qual não é mais possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

15. Josephus Flavius foi um famoso historiador judeu do século primeiro. Durante a guerra entre judeus e romanos, ele foi encurralado pelos romanos em uma caverna, junto com um grupo de 40 soldados judeus. Conta a lenda que, preferindo a morte à captura pelos romanos, os soldados decidiram suicidar-se da seguinte maneira: formaram um círculo e, a partir de uma determinada pessoa, cada um que estivesse vivo matava o soldado a sua esquerda. Nada entusiasmado com a idéia de morrer, Josephus encontrou rapidamente a posição no círculo que o manteria vivo. Qual foi esta posição? Resolva o mesmo problema para um círculo com 2022 pessoas. Generalize para n pessoas, sendo n um inteiro positivo dado.