Princípio da Casa dos Pombos (Princípio de Dirichlet)

Edson Roberto Abe

23 / janeiro / 2024

1 - Dados n+1 números inteiros, mostre que podem ser escolhidos dois destes números cuja diferença é divisível por n.

2 - Prove que, numa reunião de N pessoas, se cada uma apertar a mão de quem conhece, então pelo menos duas pessoas apertarão a mão o mesmo número de vezes.

3 – Prove que se 5 pontos são escolhidos aleatoriamente dentro de um quadrado unitário, então pelo menos 2 deles estão a uma distância não superior a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4 – Prove que se 5 pontos estão sobre um triângulo de lado 2, pelo menos dois desses pontos estão a uma distância menor ou igual a 1.

5 – 342 pontos são colocados num cubo de lado 7. Você conseguiria colocar um cubo de lado 1 dentro deste cubo maior, de modo que não existisse nenhum ponto dentro deste cubo menor?

6 – Um plano é colorido de azul e vermelho, aleatoriamente. Prove que existe um retângulo com vértices da mesma cor.

7 - Prove que é possível escolher 100 dos 200 primeiros inteiros positivos de tal modo que nenhum dos números escolhidos seja divisor de um outro escolhido, mas isto não é possível para 101 escolhidos.

8 (OBM) - Qual é o menor inteiro positivo n para o qual qualquer subconjunto de elementos de {1, 2, 3, ... ,20} contém dois números cuja diferença é 8?

9 - Prove que existem duas potências distintas de 2 cuja diferença é múltipla de 2024.

10 - Prove que qualquer que seja a sequência de n inteiros, é sempre possível escolher um bloco de inteiros adjacentes cuja soma seja divisível por n.

11 - Um paciente toma 48 pílulas em 30 dias, tomando pelo menos 1 pílula por dia. Prove que há uma sequência de dias durante os quais ele tomou exatamente 11 pílulas.

12 - Prove que é possível escolher dois de 70 números inteiros positivos distintos menores ou iguais a 200 cuja diferença seja 4, 5 ou 9.

13 (IMO-1972) - Um conjunto de 10 inteiros positivos é tal que cada um deles tem 2 dígitos. Prove que existem dois subconjuntos disjuntos com igual soma dos seus elementos.

14 – Uma fábrica possui 5 máquinas diferentes a serem operadas por 8 empregados. Para operar uma máquina, o empregado deve ser submetido a um curso longo e caro. Prove que, se a cada dia só aparecerem 5 empregados, o número mínimo de cursos que a fábrica deve dar é 20 se se deseja que sempre as 5 máquinas funcionem.

15 (Moscou – 2000) – 23 inteiros positivos, não necessariamente distintos, são escritos em uma linha. Prove que podemos inserir parênteses e sinais de mais e vezes entre eles de modo que o valor da expressão então obtida seja múltiplo de 2000.

16 – Cada um de 17 cientistas se corresponde com todos os outros. Eles se correspondem somente sobre três tópicos e quaisquer dois deles tratam sobre exatamente um tópico. Prove que há no mínimo três cientistas que se correspondem sobre o mesmo tópico.

17 – Seja n um inteiro positivo que não é divisível por 2 ou 5. Prove que há um múltiplo de n formado apenas por 1's.

18 – Considere a sequência de Fibonacci definida por:

$a_1 = a_2 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} =, n > 1$

Prove que, para qualquer n, há um número de Fibonacci terminado com n zeros.