Princípio da Indução Finita

Edson Roberto Abe

22 / janeiro / 2024

1 – Prove que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; $\forall\ n \in N^*$.

2 – Prove que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, $\forall\ n \in N^*$.

3 – Observe que

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6}$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}$$

Obtenha a regra geral sugerida por estes exemplos, e prove-a.

4 – Observe que

$$1 = 1^2$$

$$2 + 3 + 4 = 3^2$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 5^2$$

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 7^2$$

Obtenha a regra geral sugerida por estes exemplos, e prove-a.

5 – Prove que $n^3 - n$ é divisível por 6, $\forall\ n \in N$.

6 – Prove que $5.7^n - 3^n$ é divisível por 4, $\forall\ n \in N$.

7 – Demonstrar que para qualquer número natural n, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

8 – Prove que $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9, $\forall\ n \in N$.

9 – Demonstrar que $10^{n+1} - 9n - 10$ é um múltiplo de 81 para todo inteiro positivo n.

10 – Demonstrar que $7^{2n} - 48n - 1$ é um múltiplo de 48^2 para todo inteiro positivo n.

11 – Demonstrar que $\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15}$ é um inteiro positivo para todo inteiro positivo n.

12 – Prove que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \ldots + \frac{1}{2024}.$$

13 – Prove que todos os números da forma 1007, 10017, 100117, ... são divisíveis por 53.

14 – Prove que todos os números da forma 12008, 120308, 1203308, ... são divisíveis por 19.

15 – A sequência a_n é definida como segue: $a_0 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$, n > 0. Mostre que a_{10} contém mais do que 1000 noves na notação decimal.

16 – Prove que

$$2^{m+n-2} \geq mn$$

se m e n forem inteiros positivos.

17 – Usando $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, prove que:

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$$

18 (TM^2 – 2019) – Durante a aula de fatoração, Esmeralda observou que 1, 3 e 5 podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos, como se pode observar:

$1 = 1^2 - 0^2$

$3 = 2^2 - 1^2$

$5 = 3^2 - 2^2$

a) Mostre que todos os números escritos na forma 2∗m+1 podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos consecutivos.

b) Mostre como calcular o valor da expressão E = 1 + 3 + 5 + ... + (2m + 1).

c) Esmeralda, contente com o que descobriu, decidiu procurar outras formas de escrever 2019 como a diferença de dois quadrados perfeitos de inteiros positivos. Determine de quantas formas ela pode fazer o que deseja.

19 – Prove que

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2.$$

20 – Seja n um inteiro positivo. Prove a desigualdade:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right).\left(1 + \frac{1}{2^2}\right).\left(1 + \frac{1}{2^3}\right).....\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}\,.$$