Problemas diversos de tabuleiros

Prof. George Lucas

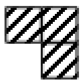
Semana Olímpica 2024 - Nível 1

OBS: Nos problemas seguintes, a menos que seja explicitado o contrário, as peças podem ser rotacionadas e/ou refletidas. Nas coberturas não há sobreposição de peças e as mesmas não excedem os limites do tabuleiro.

1. Determine o menor inteiro positivo $n > 1$ tal que é possível cobrir um tabuleiro 2023 x 2023 com peças n x 1.

2. Considere um tabuleiro de xadrez com duas casas removidos. É possível preencher totalmente esse tabuleiro com dominós?

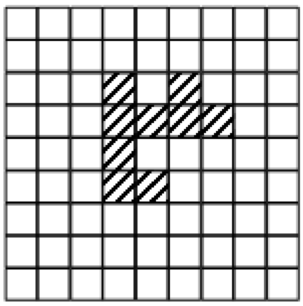
3. (Olímpiada de Maio 2004) Sobre um tabuleiro 9x9, dividido em casa 1x1, se colocam sem superposição e sem sair do tabuleiro, peças da forma



Cada peça cobre exatamente três casas.

a) A partir do tabuleiro vazio, qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?

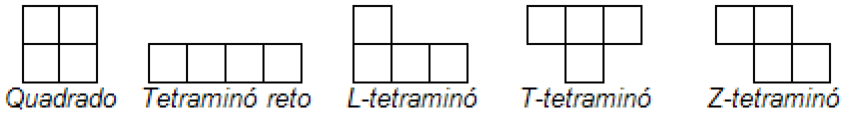
b) A partir do tabuleiro com três peças já colocadas como mostra o diagrama seguinte



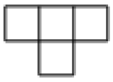
Qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?

4. Considere um tabuleiro 7x7 onde as quatro casas dos cantos foram removidas. É possível cobrir esse tabuleiro com pecinhas 3x1?

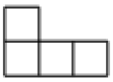
5. É possível formar um retângulo com os 5 tetraminós da figura abaixo, utilizando cada um exatamente uma vez?



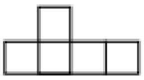
6. Podemos cobrir um tabuleiro 10x10 usando apenas T -tetraminós como abaixo?



7. Para que valores de m, n podemos cobrir um tabuleiro n xm usando apenas L -tetraminós como abaixo?



8. É possível cobrir um tabuleiro 5x10 utilizando apenas peças como abaixo?



9. Para que naturais n é possível cobrir um retângulo de tamanho 3 xn com as peças mostradas abaixo sem sobreposição?

10. É possível que um cavalo de xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro 4x10 exatamente uma vez e, em seguida, retorne para o quadrado original?

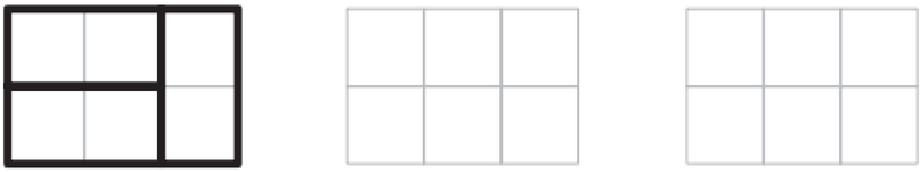
11. (Cone Sul 2008) Qual é o maior número de casas que se pode colorir num tabuleiro 7x7 de maneira que todo subtabuleiro 2x2 tenha no máximo 2 casas coloridas?

12. (OBM 2007) Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007x2007. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: cada jogada de Arnaldo consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2x2. Cada jogada de Bernaldo consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Arnaldo o primeiro a jogar. Quando Arnaldo não puder fazer sua jogada, Bernaldo fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. É possível que Bernaldo ganhe o jogo, não importando como Arnaldo jogue?

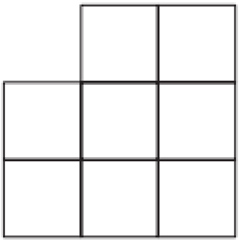
13. Prove que um tabuleiro de xadrez não pode ser coberto com 15 T-tetraminós e por um tetraminó quadrado.

14. (OBMEP 2017) Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro.

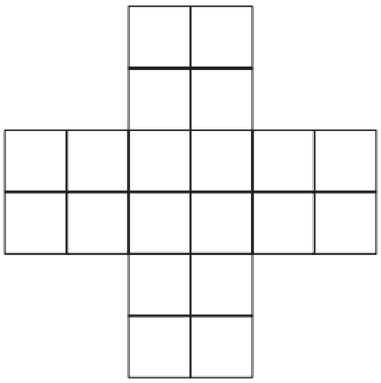
a) A figura abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro 2x3 utilizando três peças. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.



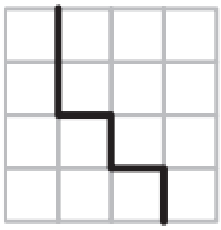
b) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com quatro peças o tabuleiro abaixo?



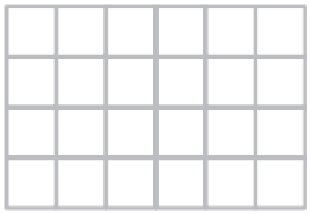
c) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com dez peças o tabuleiro abaixo?



15. (OBMEP 2015) Mônica desenha caminhos poligonais em tabuleiros formados por quadradinhos de 1cm de lado. Cada caminho começa e termina na borda do tabuleiro, contém somente esses dois pontos da borda e nunca passa duas vezes por um mesmo ponto. Por exemplo, no tabuleiro 4x4 abaixo, ela desenhou um desses caminhos com 6cm de comprimento.

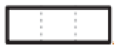


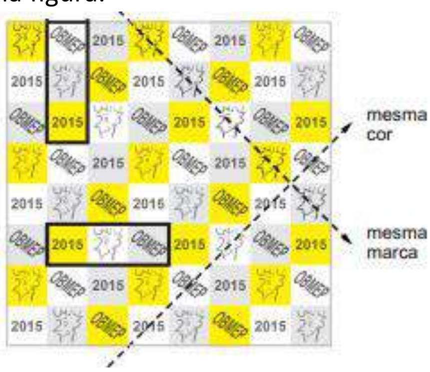
a) Trace um possível caminho desenhado por Mônica no tabuleiro 4 x 6 abaixo, com 16 cm de comprimento.



b) Explique por que o comprimento, em centímetros, do maior caminho que Mônica pode desenhar em um tabuleiro m x n é igual a (m-1)(n-1)+1

c) Há vários tipos diferentes de tabuleiros retangulares com 100 quadradinhos. Mônica formou tabuleiros de todos esses tipos e, em cada um, ela desenhou um caminho com o maior comprimento possível. Qual é o comprimento do maior desses caminhos?

16. (OBMEP 2015) Gilmar brinca de cobrir tabuleiros com peças do tipo . Cada peça cobre perfeitamente três casas do tabuleiro, na vertical ou na horizontal. As casas do tabuleiro estão pintadas e carimbadas com três cores e três marcas, intercaladamente, de modo que cada peça cobre sempre três cores diferentes e três marcas diferentes, como na figura.



a) Na Figura 1 vemos uma maneira de cobrir um tabuleiro 4 x 4, deixando apenas uma casa descoberta. Desenhe na Figura 2 outra maneira de cobrir esse tabuleiro, deixando apenas uma casa descoberta.

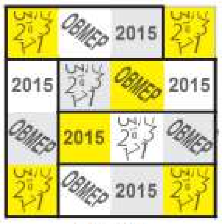


Figura 1

Figura 2

b) Explique por que, quando se cobre com 5 peças um tabuleiro 4 x 4, uma das casas do canto sempre fica descoberta.

c) Ao cobrir um tabuleiro 8 x 8 com 21 peças, uma casa ficará descoberta. Marque no tabuleiro as posições possíveis para essa casa, e justifique por que só existem essas posições que você marcou.

17. Pode um cavalo mover-se do canto inferior esquerdo até o canto superior direito de um tabuleiro de xadrez passando por todas as outras casas do tabuleiro exatamente uma vez?

18. (PAMO 2016) Considere um tabuleiro n x n formado por n^2 quadrados unitários. Determine o menor inteiro m tal que, escolhendo quaisquer m quadrados unitários do tabuleiro, existirão quatro deles cujos centros são vértices de um paralelogramo.

19. É possível que um cavalo passe por as casas de um tabuleiro 4 x 2018 exatamente uma vez retornando ao final de seu trajeto à casa de onde partiu?

20. Um tabuleiro retangular é coberto por peças 2x2 e 1x4. Uma das peças é removida do tabuleiro. Existe ainda uma peça distinta da que foi removida disponível. Prove que é impossível cobrir o tabuleiro por um rearranjo das peças que sobraram juntamente com a peça disponível.

20. (Rioplatense) Em cada casa de um tabuleiro de a linhas e b colunas está escrito um 0 ou um 1 e modo que se verificam as seguintes condições:

(i) Se uma fila e uma coluna se intersectam em uma casa com 0 então elas contêm a mesma quantidade de zeros.
(ii) Se uma fila e uma coluna se intersectam em uma casa com 1 então elas contêm a mesma quantidade de uns.

Determine todos os pares (a,b) para os quais isso é possível.

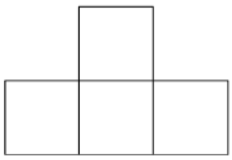
21. Prove que um retângulo a x b pode ser coberto por peças 1 x n se, e somente se, a é divisível por n ou b é divisível por n.

22. Um dos cantos de um tabuleiro (2n+1) x (2n+1) é removido. Para quais valores de n os quadrados restantes podem ser cobertos por dominós 2 x 1 de modo que exatamente metade dos dominós sejam horizontais?

23. Dado um retângulo 2022x2023, qual a menor quantidade de casas que deve ser removida, de modo que seja impossível posicionar um L-triminó nas casas restantes?

24. Em cada casa de um tabuleiro 25 x 25 é escrito +1 ou -1. Seja a_i o produto de todos os elementos da i – ésima linha e b_j o produto de todos os elemento da j-ésima coluna. Prove que $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0$.

25. (Cone Sul 2017) Seja n um inteiro positivo. De quantas maneiras um tabuleiro 4 x 4n pode ser coberto com o seguinte tetraminó?



26. (PAMO 2013) As casas de um tabuleiro n x n (n≥5) são coloridas de preto e branco tal que não há 3 casas adjacentes em uma linha, coluna ou diagonal que são da mesma cor. Prove que em qualquer quadrado 3 x 3 no tabuleiro, dois de seus cantos estão coloridos de preto e os outros dois de branco.

27. Sejam $m, n \geq 4$ inteiros. Queremos cobrir as casas de um tabuleiro $(2m-1) \times (2n-1)$ com L -triminós e Z -tetraminós. Determine o menos número de peças possível que podemos usar para cobrir o tabuleiro (sem sobreposições ou exceder os limites do tabuleiro).

28. Determine o maior número de bispos que podemos posicionar em um tabuleiro 8x8 tal que cada bispo ataca no máximo um outro bispo.