Quadriláteros cíclicos e ângulos na circunferência

Gabriella Morgado - morgado.gabriella.s@gmail.com

27ª Semana Olímpica (2024) - Nível 1

1 Introducão

Quadriláteros cíclicos (ou inscritíveis) são uma ferramenta extremamente importante em geometria de olimpíadas e te acompanharão pelo resto da sua carreira olímpica! Embora os problemas mais difíceis não sejam imediatos ao encontrar um quadrilátero cíclico, é frequentemente um passo intermediário importante. E para mostrar que um quadrilátero é inscritível, é importante saber como funcionam ângulos na circunferência.

Caso você tenha alguma dúvida na teoria ou nos problemas do material, pode entrar em contato comigo pelo meu e-mail: morgado.gabriella.s@gmail.com!

2 Ângulos na circunferência

Ao longo desta seção, O será o centro de nossa circunferência ω.

(Ângulo central.) Sejam A, B e X pontos em ω, com $\angle AOX + \angle BOX > 180°$. Definimos o ângulo relativo ao arco menor $\widehat{AB}$ como $\widehat{AB} = \angle AOB$. E para o arco maior $\widehat{AXB}$, $\widehat{AXB} = 360° - \angle AOB$.

(Ângulo inscrito.) Seja X um ponto em ω tal que X está no arco maior de $\widehat{AB}$. Então, $\angle AXB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$. E, se X está no arco menor $\widehat{AB}$, $\angle AXB = 180° - \frac{\angle AOB}{2} = \frac{360° - \widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AXB}}{2}$.

Em particular, sendo X e Y pontos ambos no arco maior ou ambos no arco menor relativos a A e B em ω, $\angle AXB = \angle AYB$. É como se "olhassem" para o mesmo arco. E, caso estejam um no arco maior e outro no arco menor, $\angle AXB + \angle AYB = 180°$.

(Triângulo retângulo na circunferência.)

Seja $\triangle ABC$ um triângulo inscrito em ω. $\triangle ABC$ é retângulo em A se, e somente se, O é ponto médio de $\overline{BC}$.

(Ângulo semi-inscrito ou ângulo de segmento.) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo inscrito na circunferência ω e P um ponto exterior tal que B e P estão em semiplanos distintos quanto à reta $\overleftrightarrow{AC}$. Então, $\overleftrightarrow{AP}$ é tangente a ω em P se, e só se, $\angle PAC = \angle ABC$.

Veja que, em particular, dado um ponto A em ω, $\overleftrightarrow{AP}$ é tangente a ω em P se, e só se, $\angle OAP = 90°$.

(Teorema do bico.) Seja P exterior a ω tal que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são tangentes a ω em A e B, respectivamente. Então, $PA = PB$.

(Ângulo excêntrico interno.) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em ω com os pontos nessa ordem, sendo P o encontro de suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Então, $\angle APB = \angle CPD = \frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{2}$. Neste caso, $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são aqueles "olhados" pelo ângulo $\angle APB = \angle CPD$, não necessariamente sendo os arcos menores.

(Ângulo excêntrico externo.) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em ω com os pontos nessa ordem, sendo Q o encontro de seus lados $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overline{BC}$, sendo $\widehat{AB} > \widehat{CD}$. Então, $\angle AQB = \angle CQD = \frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2}$. Neste caso, $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são aqueles "olhados" pelo ângulo $\angle AQB = \angle CQD$, não necessariamente sendo os arcos menores.

3 Quadriláteros cíclicos

Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, com interseção das diagonais P, interseção Q dos lados $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. São equivalentes:

(i) $ABCD$ é cíclico;
(ii) existe um ponto O tal que $OA = OB = OC = OD$;
(iii) $\angle ABC + \angle CDA = 180°$;
(iv) $\angle CAD = \angle CBD$;
(v) $PA \cdot PC = PB \cdot PD$;
(vi) $QA \cdot QD = QB \cdot QC$;
(vii) $ABCD$ satisfaz $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ (condição de igualdade da desigualdade de Ptolomeu).

4 Problemas

1. Mostre que um trapézio é cíclico se, e somente se, é isósceles.

2. Sejam D, E e F os pés das alturas relativas a A, B e C, respectivamente, num triângulo $\triangle ABC$, e seja H o ortocentro de $\triangle AB$C. Prove que $AEHF$, $BFHD$, $CDHE$, $BEFC$, $CFDA$ e $ADEB$ são cíclicos.

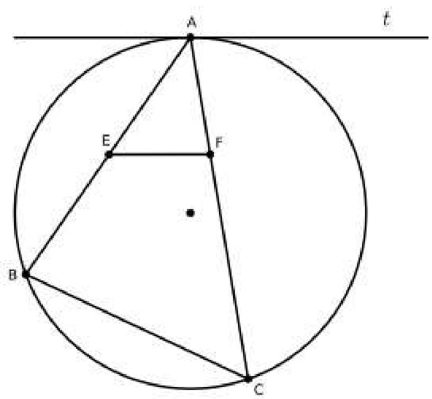
3. Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam H_A, H_B e H_C as reflexões de seu ortocentro H pelas retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente. Mostre que H_A, H_B e H_C estão na circunferência (ABC). Sejam ainda A', B' e C' as reflexões de O sobre os pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ respectivamente. Mostre ainda que A', B' e C' são as antípodas de A, B e C em (ABC).

4. Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo de incentro I. Seja ainda M a interseção de $\overleftrightarrow{AI}$ e (ABC), com $M \neq A$. Mostre que M é o ponto médio do arco menor $\widehat{BC}$, ou seja, mostre que $MB = MC$. Mostre ainda que $MB = MC = MI$, ou seja, M é o circuncentro de $\triangle BIC$.

5. **(Banco de Questões OBMEP)** As circunferências $C_!$ e C_2 são tangentes à reta l em A e B, respectivamente, e entre si em C. Prove que $\triangle ABC$

é retângulo.

6. (Banco de Questões OBMEP) Na figura, a reta t é paralela ao segmento EF e tangente à circunferência. Se $AE = 12$, $AF = 10$ e $FC = 14$, determine a medida do comprimento de EB.

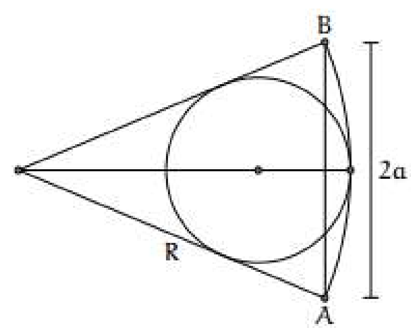


7. Prove que, se duas circunferências ω_1 e ω_2 de centros O_1 e O_2, respectivamente, são tangentes em T, então O_1, O_2 e T são colineares.

8. (Banco de Questões OBMEP) Um semicírculo de diâmetro $\overline{EF}$ situado no lado $\overline{BC}$ do triângulo $\triangle ABC$ é tangente aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em Q e P, respectivamente. As retas $\overleftrightarrow{EP}$ e $\overleftrightarrow{FQ}$ se encontram em H. Mostre que $\overline{AH}$ é altura do triângulo.

9. (POTI) Seja M um ponto no interior do quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $ABMD$ é paralelogramo. Prove que, se $\angle CBM = \angle CDM$, então $\angle ACD = \angle BCM$.

10. (Banco de Questões OBMEP) Uma circunferência de raio r está inscrita em um setor circular de raio R. O comprimento da corda AB é igual a $2a$. Prove que $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.



11. (OBM) Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Sejam E o simétrico de D em relação a AC e F o simétrico de D em relação a AB. DE intersecta a reta AB em G e DF intersecta a reta AC em H. Demonstre que A, E, F, G, H são concíclicos.

12. Prove que (ADE), (ACB), (FCD) e (FBE) possuem um ponto comum de interseção, sendo $BCDE$ um quadrilátero convexo, com A interseção das retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ e F interseção das retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$.