SOMAS E PRODUTOS TELESCÓPICOS

Semana Olímpica, N1, Bento Gonçalves – RS, janeiro de 2024
Tiago Sandino, tiagosandino1@gmail.com

INTRODUÇÃO

A técnica de resolver uma soma telescópica quase sempre consiste em "fazer aparecer" subtrações e a técnica de resolver um produto telescópico quase sempre consiste em "fazer aparecer" divisões. Quando fazemos essas "mágicas", tudo se reduz a poucos termos. Nas provas de olimpíadas mais atuais, não espere que o problema seja simplesmente uma soma ou produto telescópico, mas sim, que isso seja um passo da solução.

Exemplo 1 (Soma Telescópica). Encontre o valor da soma:

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{999\cdot 1000}.$$

Solução. Veja que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Usando isso, podemos reduzir S da seguinte forma:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) = 1 - \frac{1}{1000}.$$

Note que a segunda fração de cada parêntesis cancela com a primeira do próximo parêntesis.

Vale observar que muitas vezes será bem conveniente usar a notação de somatório. Neste problema, poderíamos proceder da seguinte forma:

$$S = \sum_{i=1}^{999} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{999} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{1000}.$$

Note a "rapidez" da última igualdade.

Exemplo 2 (Soma Telescópica). Encontre o valor de:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{997\cdot 1000}.$$

Solução. A diferença em relação ao problema anterior é pouca. Teremos que usar agora o seguinte

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right).$$

Termine as contas.

Exemplo 3 (Soma Telescópica). Se $F(n+1) = \frac{2F(n)+1}{2}$ para $n = 1,\ 2,\ ...,$ e $F(1) = 2$, então determine o valor de $F(101)$.

Solução. $F(n+1) = \frac{2F(n)+1}{2} \Rightarrow F(n+1) - F(n) = \frac{1}{2}$. Com essa última expressão, podemos escrever:

$$F(101) - F(100) = \frac{1}{2}$$

$$F(100) - F(99) = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$F(3) - F(2) = \frac{1}{2}$$

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{2}$$

Se somarmos todos os termos do lado esquerdo, sobra apenas $F(101) - F(1)$ e do lado direito, teremos $100 \cdot \frac{1}{2} = 50$. Como $F(1) = 2$, temos $F(101) = 52$.

Como todos os termos intermediários foram cancelados, podemos chamar essa soma de telescópica. Perceba também que a sequência dos valores de $F(i)$, com $i \geq 1$, é uma progressão aritmética.

Exemplo 4 (Produto Telescópico). Calcule o valor do produto

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{12}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{3n+3}{3n} \cdot \ldots \cdot \frac{303}{300}.$$

Solução. O numerador de todas as frações cancela com o denominador da fração seguinte

$$\frac{\cancel{6}}{3} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{12}}{\cancel{9}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{3n+3}}{\cancel{3n}} \cdot \ldots \cdot \frac{303}{\cancel{300}},$$

de forma que sobra $\frac{303}{3} = 101$.

Exemplo 5 (Produto Telescópico). Defina uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots$ por $a_1 = 1$ e $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, $\forall n \geq 1$. Determine o valor de a_{100}.

Solução. Façamos

$$a_{100}^3 = 99a_{99}^3$$

$$a_{99}^3 = 99a_{98}^3$$

$$\vdots$$

$$a_2^3 = 99a_1^3$$

Multiplicando todas essas equações e fazendo os devidos cancelamentos, temos $a_{100}^3 = 99^{99}a_1^3 \Rightarrow a_{100} = 99^{33}$.

PROBLEMAS FÁCEIS

1. Calcule

$$3-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}-\frac{1}{56}.$$

2. Calcule

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}.$$

3. Ache a soma

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}+\frac{1}{238}.$$

4. Prove que $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ é um número inteiro.

5. Considere uma sequência u_n definida por $u_1=5$ e a relação

$$u_{n+1}-u_n=3+4(n-1), n=1, 2, 3, \ldots$$

Se u_n é expresso como um polinômio em n, determine a soma algébrica de seus coeficientes.

6. Calcule a soma

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}.$$

PROBLEMAS MÉDIOS

1. Calcule

$$\frac{(4\times 7+2)(6\times 9+2)(8\times 11+2)\cdot \ldots \cdot (100\times 103+2)}{(5\times 8+2)(7\times 10+2)(9\times 12+2)\cdot \ldots \cdot (99\times 102+2)}.$$

2. Calcule

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2009}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2009}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right).$$

3 (OMRN, 2020, N2). Se

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+20}=\frac{m}{n},$$

onde m e n são inteiros positivos primos entre si, isto é, $mdc(m,n)=1$, determine o valor de $m+n$.

4. Calcule $\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{99^2+1}{99^2-1}$.

5. Simplifique

$$1-\frac{2}{1\cdot(1+2)}-\frac{3}{(1+2)(1+2+3)}-\frac{4}{(1+2+3)(1+2+3+4)}-\cdots-\frac{100}{(1+\cdots+99)(1+\cdots+100)}$$

para uma fração própria na forma mais reduzida e ache a diferença entre seu denominador e numerador.

6 (OBM, 2014, N3, Fase 2, P3/5 Parte A). A sequência a_1, a_2, a_3, ... satisfaz $a_1 = 1$ e $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + n}$. Qual é o inteiro mais próximo de a_{2014}?

7 (Singapura, 2011). Ache o valor da seguinte expressão

$$\frac{1}{1+11^{-201}}+\frac{1}{1+11^{-2009}}+\frac{1}{1+11^{-2007}}+\cdots+\frac{1}{1+11^{2009}}+\frac{1}{1+11^{2011}}.$$

8. Simplifique a soma:

$$\frac{12}{1^2\cdot 3^2}+\frac{24}{3^2\cdot 5^2}+\frac{36}{5^2\cdot 7^2}+\frac{48}{7^2\cdot 9^2}+\cdots+\frac{12n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

9 (Cone Sul TST, 2007, P1). Considere a sequência

$$a_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2},\quad n\geq 1.$$

Prove que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{20}}$$

é um inteiro.

PROBLEMAS DIFÍCEIS

1. Calcule

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{100\times 101\times 102}.$$

2. Ache a soma

$$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{50}{1+50^2+50^4}.$$

3. Simplifique a expressão

$$\frac{1^2}{1^2-10+50}+\frac{2^2}{2^2-20+50}+\cdots+\frac{9^2}{9^2-90+50}.$$

4 (Olymon 2000, University of Toronto). Seja

$$S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{500^2}{999 \cdot 1001}.$$

Ache o valor de S.

5 (OBM, 2020, N3, P1/6). Prove que existem inteiros positivos a_1, a_2, ..., a_{2020} tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{2020a_{2020}} = 1.$$

6 (Singapura Jr., 2011, Fase 1/2). Calcule a seguinte soma:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{2^{10}}.$$

a) $\frac{503}{256}$ b) $\frac{505}{256}$ c) $\frac{507}{256}$ d) $\frac{509}{256}$ e) Nenhuma das alternativas anteriores.