Bases numéricas

Vitória Aparecida Santos Ferreira - vitoriaaparecida94@gmail.com

27ª Semana Olímpica - Janeiro 2024 - Nível 2

1 Apresentação inicial

Base numérica é um sistema de símbolos (algarismos) com os quais se exprimem quantidades (números). Usamos o **sistema decimal**, que consiste em algarismos de 0 a 9 e, possuindo 10 símbolos, é denominado de **base 10**. Este é natural de ser usado pensando que o ser humano tem 10 dedos nas mãos. Há registros, porém, de civilizações que usavam outros sistemas. Por exemplo, os assírios (2500 a.C. - 612 a.C.) usavam o sistema sexagesimal, isto é, na base 60. Há algumas hipóteses de historiadores sobre as razões para a criação deste método, útil nas medições de ângulos e de tempo.

De maneira geral, um número $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ em uma base b, onde b é natural maior do que 1, é uma forma de representar o valor

$$a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0,\ 0 \le a_i \le b-1.$$

Notação: $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ indica o número n escrito na base b.

1.1 Algoritmo de mudança de base

Se quisermos escrever o número n na base b, isto é, representá-lo como $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$, onde $0 \le a_i \le b-1$, podemos realizar o seguinte procedimento

- Dividir n pela maior potência de b que seja menor ou igual a n, denotada por b^k. Produz-se um quociente a_k e resto r_k.
- Dividir r_k pela próxima potência de b, isto é, por b^{k-1}. O quociente é a_{k-1} e seja o resto r_{k-1}.

$$\vdots$$

- Dividir r_2 por $b^1 = b$. O quociente é a_1 e o resto é r_1.
- Dividir r_1 por $b^0 = 1$. O quociente é a_0 e o resto é 0.

Outra maneira: nesta, os a_i serão advindos de **restos**.

- Dividir n por b. O resto é a_0 e seja o quociente q_0.
- Dividir q_0 por b. O resto é a_1 e seja o quociente q_1.

$$\vdots$$

- Dividir q_{k-2} por b. O resto é a_{k-1} e seja o quociente q_{k-1}.
- Dividir q_{k-1} por b. O resto é a_k e o quociente é 0.

2 Exemplos

1. Escreva em notação decimal os números $10101_2, 10101_3, 126_7, 158_{11}$.

   Solução:

$$10101_2 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 21.$$
$$10101_3 = 3^0 + 3^2 + 3^4 = 91.$$
$$126_7 = 6 \cdot 7^0 + 2 \cdot 7^1 + 7^2 = 69.$$
$$158_{11} = 8 \cdot 11^0 + 5 \cdot 11^1 + 1 \cdot 11^2 = 184.$$

2. Escreva o número 100 nos sistemas de bases 2, 3 e 4.

   Solução:

$$100 = 2 \cdot 50 + \underbrace{0}_{a_0} \qquad 50 = 2 \cdot 25 + \underbrace{0}_{a_1} \qquad 25 = 2 \cdot 12 + \underbrace{1}_{a_2}$$

$$12 = 2 \cdot 6 + \underbrace{0}_{a_3} \qquad 6 = 2 \cdot 3 + \underbrace{0}_{a_4} \qquad 3 = 2 \cdot 1 + \underbrace{1}_{a_5} \qquad 1 = 2 \cdot 0 + \underbrace{1}_{a_6}$$

   Portanto, 100 na base 2 é 1100100.

   De maneira semelhante, 100 na base 3 é 10201 e, na base 4, 1210.

3. Formule um critério para ver se um número é par ou ímpar na base 3.

   Solução: Qualquer número na base 3 possuirá apenas algarismos 0, 1 ou 2, que, devido ao posicionamento, representarão o valor

$$a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0, \; a_i \in \{0, 1, 2\}.$$

   Analisando a divisibilidade desta soma por 2, as parcelas que possuem coeficiente $a_i = 0$ ou 2 são divisíveis por 2. Portanto, as que definirão a paridade do número são as com $a_i = 1$. Como potências de 3 são ímpares, tem-se que $a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0$ será par se, e somente se, houver quantidade par de coeficientes $a_i = 1$. De maneira equivalente, se, e somente se, a soma dos a_i for par.

4. João distribui 127 moedas de um real em sete porta-moedas de modo que qualquer valor possa ser pago sem abri-los, isto é, se escolhido um porta-moedas, usam-se todas as moedas dele. Como ele pode fazer isso?

   Solução: Tem-se que todo número é soma de potências de 2. Distribua, assim, as 127 moedas na forma $2^0, 2^1, \ldots, 2^6 = 64$ moedas, com $1+2+4+8+16+32+64 = 127$. João abrirá o porta-moeda com 2^k moedas apenas quando o valor a ser pago, quando visto na representação binária, possuir $a_k = 1$.

3 Exercícios([1],[2],[3])

1. (OMU - Nível beta - fase 1 - 2023) A igualdade $4 + 34 + 141 = 234$ é verdadeira em alguma base? Para qual(is) base(s) esta igualdade é válida?

2. (Canadian Mathematical Olympiad - 1977 - P3) N é um inteiro cuja representação na base b é 777. Calcule o menor inteiro positivo b para o qual $N = n^4$, com n inteiro.

3. Prove que, em um sistema de base b, um número é divisível por b se, e somente se, o último algarismo for 0.

   Nota: a divisibilidade de um número por outro independe do sistema tomado. Mas, em cada sistema, existem maneiras mais práticas de determinar a divisibilidade, que são os testes de divisibilidade.

4. Generalize o exemplo 3 (sobre paridade) para uma base b qualquer.

5. Determine quantos ímpares na base 10 possuem exatamente 3 dígitos na base 7.

6. Se x, y são dígitos tais que $(xyxy)_b = 1450$, qual o valor de $x + y + b$?

7. Se N na base $b + 1$ é $bbbb$ e $N = Q(Q - 2)$, quanto vale Q na base $b + 1$?

8. (Fundação Carlos Chagas - 2011 - adaptada) No País dos Números, onde todos os habitantes pertencem apenas ao sistema decimal de numeração, dois algarismos não nulos, a, b, passeavam a uma velocidade constante. Percebeu-se que

   - Às 16h01, tinham percorrido (ab) metros.

   - Às 16h43, tinham percorrido (ba) metros.

   - Às 17h01, tinham percorrido $(a0b)$ metros.

   A que horas começou o passeio?

9. (IMO - 1983) Podemos escolher 1983 inteiros não negativos distintos menores que 10^5 tais que não haja três em progressão aritmética?

10. (OBM - Júnior - segunda fase - 1997) Há n lâmpadas alinhadas e numeradas da esquerda para a direita, de 1 a n. Cada uma pode estar acesa ou apagada. A cada segundo, determina-se a apagada de maior número, acende-se esta e se inverte o estado das posteriores a ela. O processo termina se todas ficarem acesas.

    a) Mostre que, em algum momento, todas as lâmpadas estarão acesas.

    b) Suponha que, inicialmente, todas as lâmpadas estejam apagadas. Determine depois de quantos segundos todas estarão acesas.

    c) Suponha agora que $n = 11$ e que, no início, somente as lâmpadas 6, 7, 10 estejam acesas. Mostre que após exatamente 1997 segundos todas estarão acesas.

11. (AIME I - 2003) Seja N a quantidade de inteiros positivos que são menores ou iguais a 2003 e cujas representações na base 2 tenham mais 1 do que 0. Calcule o resto da divisão de N por 1000.

12. (Equação funcional e base) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função que verifica que

    $$f(1) = 2;\ f(2) = 1;\ f(3n) = 3f(n);\ f(3n + 1) = 3f(n) + 2;\ f(3n + 2) = 3f(n) + 1.$$

    Encontre quantos são os inteiros positivos n com $n \leq 2003$ e tais que $f(n) = 2n$.

13. (American Regions Mathematics League - 2011) Calcule a base b na qual

    $$(253)_b \cdot (341)_b = (74xyz)_b,$$

    para alguns dígitos x, y, z.

Referências

[1] D. Fomin, S. Genkin, and Itenberg I. *Círculos matemáticos: a experiência russa*. IMPA, 1st edition, 2012.

[2] Kin Y. Li. Base n representations. *Mathematical Excalibur*, vol. 6(no. 2), April-May 2001.

[3] Tiago Miranda and Cleber Assis. Sistemas de numeração - tópicos adicionais. *Portal da Matemática - OBMEP*.