Concorrência e Colinearidade - N2
Semana Olímpica 2024

Samuel Feitosa

1 Os Teoremas de Ceva e Menelaus

Teorema 1 (Teorema de Ceva) As cevianas AX, BY, CZ do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Teorema 2 (Teorema de Menelaus) Se os pontos X, Y, Z estão sobre os lados AB, BC, CA do triângulo $\triangle ABC$ e são colineares, se e somente se,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Exercício 1. (Torneio das Cidades 1983) Os vértices A, B, C de um triângulo são ligados aos pontos A', B', C', respectivamente, que estão sobre os lados opostos aos vértices (mas não são vétices do triângulo). É possível que os pontos médios dos segmentos AA', BB' e CC' sejam colineares?

Exercício 2. (Torneio das Cidades 2002) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e reversos. Prove que os pontos médios de AA', BB', CC' são colineares.

Exercício 3. Um círculo passa através dos vértices B e C do triângulo $\triangle ABC$ e encontra AB em P e AC em R. Se PR encontra BC em Q, prove que $\dfrac{QC}{QB} = \dfrac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}$.

Exercício 4. No quadrilátero $ABCD$, AB e CD encontram-se em P, AD e BC encontram-se em Q. As diagonais AC e BD encontram PQ em X e Y, respectivamente. Prove que $\dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YQ}$.

Exercício 5. Prove que uma reta desenhada através do baricentro G do triângulo $\triangle ABC$ encontra os lados AB e AC em pontos M e N, respectivamente, tais que

$$AM \cdot NC + AN \cdot MB = AM \cdot AN.$$

Exercício 6. No triângulo $\triangle ABC$, pontos L, M, N estão em BC, AC, AB, respectivamente, e AL, BM, CN são concorrentes.

i) Encontre o valor numérico de $\dfrac{PL}{AL} + \dfrac{PM}{BM} + \dfrac{PN}{CN}$

ii) Encontre o valor numérico de $\dfrac{AP}{AL} + \dfrac{BP}{BM} + \dfrac{CP}{CN}$

Exercício 7. Os pontos E e F são escolhidos sobre os lados AB e AC, respectivamente, do triângulo $\triangle ABC$ de modo que $AE = AF$. A mediana AM intersecta EF no ponto Q. Prove que $\dfrac{QE}{QF} = \dfrac{AC}{AB}$.

Exercício 8. O $\triangle ABC$ corta um círculo Γ nos pontos: $\{E, E'\} = \Gamma \cap AB$, $\{D, D'\} = \Gamma \cap BC$ e $\{F, F'\} = \Gamma \cap AC$. Prove que se AD, BF e CF são concorrentes, então AD', BF' e CE' também serão concorrentes.

Exercício 9. Prove que os três pares de tangentes externas comuns a três círculos, tomados dois a dois, encontram-se em três pontos colineares.

Exercício 10. Um círculo inscrito no triângulo $\triangle ABC$ é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos L, M e N, respectivamente. Se o prolongamento de MN encontra BC em P,

i) Prove que $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BP}{PC}$

ii) Prove que se NL encontra AC em Q e ML encontra AB em R, então P, Q e R são colineares.

Exercício 11. No triângulo $\triangle ABC$, onde CD é a altura relativa ao lado AB e P é qualquer ponto sobre DC, AP encontra CB em Q e BP encontra CA em R. Prove que $\angle RDC = \angle QDC$.

Exercício 12. No triângulo $\triangle ABC$, pontos E, F e D são oa pés das alturas relativas aos vértices A, B, C, respectivamente. Os prolongamentos ds lados do triângulo pedal encontram os lados do triângulo $\triangle ABC$ os pontos M, N e L. Prove que M, N, L são colineares.

Exercício 13. No triângulo $\triangle ABC$, L, M, N são os pés das alturas dos vértices A, B, C, respectivamente. Prove que as perpendiculares de A,B e C a MN, LN e LM, respectivamente, são concorrentes.

Exercício 14. (Teorema de Sylvester) Um conjunto S de pontos no plano tem a seguinte propriedade: qualquer reta passando por 2 pontos passa também por um terceiro. Mostre que todos os pontos estão sobre uma reta

Exercício 15. São desenhadas N retas no plano $N \geq 3$, não havendo 2 delas paralelas, por todo ponto de interseção de 2 retas, passa pelo menos mais uma reta. Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Exercício 16. (OBM 2016) Seja ABC um triangulo. As retas r e s são as bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s sao tais que $AD \parallel BE$ e $AE \parallel CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triangulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I sao colineares então $AB = AC$.

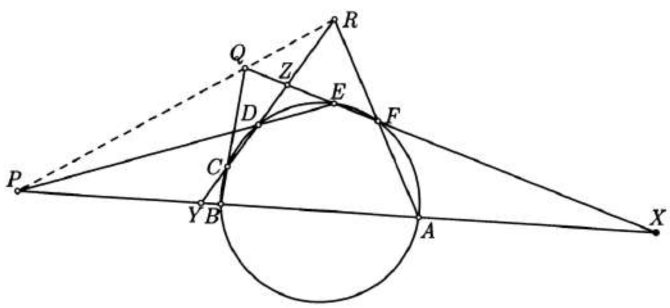
Exercício 17. (USAMO 1987) Seja ABC um triângulo. D, E, F são, respectivamente, os pés das bissetrizes de C, B, A aos lados. Se $\angle DGF = 90°$. Calcule os possíveis valores do ângulo A.

Exercício 18. (URSS) Sejm M, N, P os pontos médios dos arcos $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$ determinados pelo triângulo ABC em seu circuncírculo, respectivamente. Sejam E e F os pontos de interseção de MN e MP com os lados BC e AC, respectivamente. Mostre que EF passa pelo incentro do triângulo ABC.

Exercício 19. Seja ABC um triângulo com incentro I. Mostre que os circuncírculos dos triângulos IAB, IBC e ICA estão sobre um círculo cujo centro é o circuncentro do triângulo ABC.

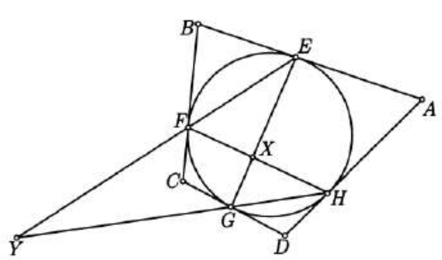
2 O Teorema de Pascal

Teorema 3 (Pascal) Considere os pontos A, B, C, D, E e F sobre o círculo Γ. Sejam $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ e $R = CD \cap FA$. Então os pontos P, Q e R são colineares.



Teorema 4 (Recíproca do Teorema de Pascal) Considere os pontos A, B, C, D e E sobre uma circunferência Γ e seja F um ponto no plano do circunferência. Sejam $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ e $R = CD \cap FA$. Se os pontos P, Q e R são colineares, então $F \in \Gamma$.

Exercício 20. (Teorema de Newton) O quadrilátero $ABCD$ é circunscrito ao círculo Γ. Os pontos de tangência do círculo com os lados AB, BC, CD e DA do quadrilátero $ABCD$ são E, F, G e H, respectivamente. Prove que as retas AC, EG, BD e FH são concorrentes



Exercício 21. (Teorema de Lemoine) Seja ABC um triângulo e Γ seu círculo circunscrito. A tangente ao círculo no ponto A intersecta a reta BC no ponto A_1. De modo análogo definimos os pontos B_1 e C_1. Prove que os pontos A_1, B_1 e C_1 são colineares.

Exercício 22. (IMO 2014) Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Exercício 23. (OBM 2003) Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.

Exercício 24. (Polônia 1997) Dado um pentágono convexo $ABCDE$ com $DC = DE$ e $\angle BCD = \angle DEA = \pi/2$, seja F o ponto no segmento AB tal que $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{AE}{BC}$. Mostre que

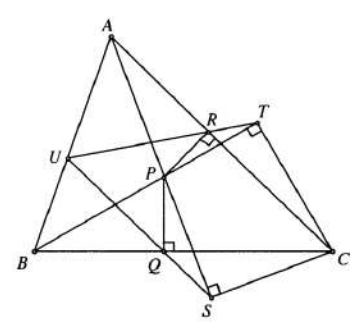
$$\angle FCE = \angle ADE \text{ e } \angle FEC = \angle BDC.$$

Exercício 25. (Australia 2001) Sejam A, B, C, B_1, C_1 pontos sobre o círculo Γ tais que AA_1 é perpendicular a BC, BB_1 é perpendicular a CA e CC_1 é perpendicular a AB. Seja D um ponto sobre o círculo Γ. Defina $A_2 = DA_1 \cap BC$, $B_2 = DB_1 \cap CA$ e $C_2 = DC_1 \cap AB$. Prove que os pontos A_2, B_2 e C_2 e o ortocentro do triângulo ABC são colineares.

Exercício 26. (Olimpíada de Matemática do Danúbio 2011) Dados 6 pontos sobre um círculo, A, a, B, b, C e c, mostre que as retas de Pascal dos Hexágramas $AaBbCc$, $AbBcCa$ e $AcBaCb$ são concorrentes.

Exercício 27. (Seletiva JBMO da Romênia 2013) Seja O o circuncentro do circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. COnsidere um diâmetro arbitrário intersectando o lado AB em D e o lado AC em E. Se F é o ponto médio do lado BE e G o ponto médio do lado CD, prove que $\angle FOG = \angle BAC$.

Exercício 28. (Banco IMO 1991)De um ponto P no interior do triângulo ABC, perpendiculares PQ e PR aos lados BC e AC são desenhadas. Do vértice C, perpendiculares CS e CT são desenhadas para as extensões de AP e BP. Prove que independente do ponto P, prove que o ponto de interserção U de SQ e TR sempre está sobre a reta AB.



Teorema 5 (Teorema de Brianchon) Se todos os seis lados de um hexágono são tangentes a um círculo, então as três diagonais que unem vértices opostos são concorrentes.