Tudo (con)junto e misturado: O retorno

Prof$^{\underline{a}}$ Luiza Clara Pacheco

27$^{\underline{a}}$ Semana Olímpica - Nível 2

Problema 1 Prove que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

Problema 2 Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto {1, 2, . . . , 2n}, então um deles será múltiplo de outro. Isso pode ser evitado com n números?

Problema 3 (Cone Sul 2013) Seja M o conjunto dos números inteiros de 1 até 2013, inclusive. A cada um dos subconjuntos de M atribuímos uma das k cores disponíveis, com a condição de que, se dois conjuntos distintos A e B cumprem que $A \cup B = M$, então aos conjuntos são atribuídas cores distintas. Qual é o menor valor possível que k pode ter?

Problema 4 (Lista Cone Sul 2017) Ache o maior inteiro positivo N tal que o número de inteiros no conjunto {1, 2,..., N} que são divisíveis por 3 é igual ao número de elementos que são divisíveis por 5 ou por 7 (ou por ambos).

Problema 5 (JBMO Shortlist 2019) Seja S um conjunto de 100 números inteiros positivos com a seguinte propriedade: "Entre cada quatro números de S, há um número que divide cada um dos outros três ou há um número que é igual à soma dos outros três." Prove que o conjunto S contém um número que divide todos os outros 99 números de S.

Problema 6 (Lista Cone Sul 2016) Seja S um subconjunto do conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 1997} com |S| > 1000. Prove que um dos elementos de S é uma potência de 2 (isto é um número da forma 2^k onde k é um inteiro não negativo) ou existem dois elementos distintos a, $b \in S$ tal que a soma $a + b$ é uma potência de 2.

Problema 7 (IMO 1972) Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

Problema 8 (EGMO 2021) O número 2021 é *fantabuloso*. Se qualquer elemento do conjunto $\{m, 2m+1, 3m\}$ é *fantabuloso* para algum m inteiro positivo, então todos os elementos desse conjunto são fantabulosos. Com base nisso, podemos afirmar que 2021^{2021} é *fantabuloso*?

Problema 9 (TST Cone Sul 2016) Sejam A e B dois conjuntos finitos e não vazios. Seja $A + B$ o conjunto definido por $\{a + b | a \in A, b \in B\}$.
(a) Encontre o maior inteiro k possível para o qual existem conjuntos A, B contidos em N tais que $|A| = |B| = k$ e $A + B = \{0, 1, 2, \ldots , 2016\}$.
(b) Encontre o menor inteiro m possível para o qual existem conjuntos A, B contidos em N tais que $|A| = |B| = m$ e $A + B = \{0, 1, 2, \ldots , 2016\}$.

Problema 10 (IMO 1985) Sejam n, k inteiros positivos primos entre si, com $k < n$. Pintamos cada número em $M = \{1, 2, 3, \ldots, n - 1\}$ de azul ou branco, de modo que i e $n - i$ têm a mesma cor. Sabendo também que, se i k, então i e $|i - k|$ têm a mesma cor, prove que todos os números em M têm a mesma cor.

Problema 11 (Áustria 2018) Seja M um conjunto contendo inteiros positivos com as seguintes propriedades:
(i) $2018 \in M$
(ii) Se $m \in M$, então todos os divisores positivos de m também são elementos de M.
(iii) Para todos os elementos $k, m \in M$ com $1 < k < m$, o número $km + 1$ também é um elemento de M.
Prove que $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Problema 12 (Teste EGMO 2021) Letícia adora brincar com conjuntos. Em determinado dia, ela decidiu criar um conjunto L tal que para todo n inteiro positivo, exatamente um elemento entre n, $2n$ e $3n$ estivesse em L. Se 2 pertence a L, prove que 13824 não está em L.

Problema 13 Prove que em qualquer grupo de 17 números escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 24, 25\}$ é possível escolher dois cujo produto é um quadrado perfeito.

Problema 14 (Irlanda 1997) Seja A um subconjunto de $\{0, 1, ...1997\}$ contendo mais de 1000 elementos. Prove que A contém ou uma potência de 2 ou dois inteiros distintos cuja soma é uma potência de 2.

Problema 15 (Índia 2003) Seja n um inteiro positivo e A, B, C uma partição de $\{1, 2, 3, ..., 3n\}$ tal que $|A| = |B| = |C| = n$. Prove que existe $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ um entre x, y, z é igual a soma dos outros dois.