27ª Semana Olímpica

• Nível 2 • Equações Dio(FUN!)tinas •

Profª Ana Paula Chaves
apchaves@ufg.br
https://sites.google.com/ufg.br/apchaves

Resumo: *Neste material, são propostos diversos problemas (dos mais variados níveis e técnicas de resolução), que fazem parte do universo das* Equações Diofantinas*: equações cujas soluções de interesse, quando existirem, são números inteiros. O fato de não existir um algoritmo que resolva qualquer equação Diofantina*[a]*, torna, de fato, o estudo destas bastante* divertido*! :)*

[a] Esse foi um dos problemas mais famosos da lista de Hilbert (o 10º), cuja solução completa foi obtida em 1970, após contribuições de diversos matemáticos (Davis, Putnam, Robinson, dentre outros), e hoje é conhecido como *Teorema de Matiyasevich.*

1. Introdução e algumas dicas

Diofanto, o "pai da álgebra", é famoso pelo seu livro *Aritmética*, um trabalho sobre teoria dos números que envolve a solução de algumas equações algébricas. No entanto, poucos fatos são conhecidos da sua vida e existem várias discussões a cerca da época em que ele viveu. Grande parte dos historiadores acreditam que Diofanto realizou seus trabalhos por volta de 250 AC. Esse matemático foi o primeiro algebrista a empregar símbolos, chamados de *aritmos*, para designar alguma quantidade desconhecida, e também símbolos para operações algébricas e potências. *Aritmética* também é importante por seus resultados em teoria dos números, como por exemplo que nenhum inteiro da forma $8n+7$ pode ser escrito como a soma de três quadrados. Acredita-se que no original, Aritmética era uma coletânea de 13 livros, mas os manuscritos gregos que sobreviveram continham apenas 6 destes livros. Os outros são considerados perdidos, e possivelmente foram queimados no grande incêndio ocorrido em Alexandria, não muito tempo após Diofanto concluir a coletânea.

Pelos estudos pioneiros de Diofanto, denomina-se por *Equação Diofantina* uma equação da forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \tag{1}$$

onde f é uma função de n variáveis, e $x_1, \dots, x_n$ assumem apenas valores inteiros. Definitivamente, o exemplo mais conhecido desse tipo de equação é o agora denominado teorema de *Fermat-Wiles*, que afirma que não existem inteiros positivos x, y, z e n, com $n > 2$, satisfazendo $x^n + y^n = z^n$. Esse teorema surgiu da famosa anotação feita por Pierre de Fermat, em 1637, na margem de uma cópia do livro *Aritmética*, que estabelecia o resultado e continha a célebre afirmação: "Encontrei uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, mas esta margem é estreita demais para contê-la." Apesar da afirmação de Fermat, sua demonstração "maravilhosa" não foi encontrada. Então, inúmeros matemáticos foram tentados à demonstrar a conjectura, o que aconteceu apenas 358 anos depois com a prova de Andrew Wiles.

Quando temos uma equação Diofantina, é necessário respondermos três perguntas:

- A equação possui solução?
- Caso possua solução, a quantidade de soluções é finita ou infinita?
- Caso possua solução, determinar todas.

Na lista de problemas que temos a seguir, serão abordadas técnicas clássicas e problemas de olimpíadas de vários países. Dentre as ideias e estratégias mais básicas, temos:

(i) Simplificar a expressão e fatorar;
(ii) Analisar $(\bmod m)$, para algum m esperto;
(iii) Usar propriedades de mdc (dentre outros), para reduzir a equação a casos mais restritos;
(iv) Usar a *Descida Infinita de Fermat*;
(v) Sempre que possível, use estimativas para restringir os valores de uma ou mais variáveis;
(vi) Faça alguns casos particulares para ter uma ideia de como as soluções se comportam;

2. Warm-up

Problema 2.1. Sejam p e q números primos distintos. Encontre a quantidade de pares de inteiros positivos (x, y), que satisfazem a equação

$$\frac{x}{p} + \frac{q}{y} = 1$$

Problema 2.2. (Romênia) Determine todos os trios de inteiros positivos (x, y, z) que são soluções da equação

$$(x+y)^2 + 3x + y + 1 = z^2.$$

Problema 2.3. (Irlanda) Ache todos os pares de inteiros (x, y) tais que

$$1 + 1996x + 1998y = xy.$$

Problema 2.4. Encontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) que satisfazem a equação

$$3^x - 2^y = 7$$

Problema 2.5. (USAMO) Determine todas as soluções da equação

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1599,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ são inteiros não-negativos.

Problema 2.6. Mostre que a equação

$$4xy - x - y = z^2$$

não possui solução para x, y, z inteiros positivos.

Problema 2.7. Encontre todos os inteiros x, y, z que satisfazem

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy = 0.$$

Problema 2.8. Mostre que, para cada número primo p, a equação

$$2^p + 3^p = q^n$$

não possui solução inteira (q, n), onde $q, n > 1$.

3. Problemas Propostos

Problema 3.1. Prove que a equação $2^n + 1 = q^3$ não admite soluções (n, q) em inteiros positivos.

Problema 3.2. Encontre todos os triângulos retângulos de lados inteiros que possuem a área igual ao seu perímetro

Problema 3.3. (URSS) Encontre todas as soluções inteiras do sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt &= 3 \\ xt + yz &= 1. \end{cases}$$

Problema 3.4. Ache todas as soluções inteiras da equação $x(y+1)^2 = 243y$.

Problema 3.5. (OBM) Mostre que não existem dois inteiros a e b tais que $(a+b)(a^2+b^2) = 2001$.

Problema 3.6. (Eslovênia) Ache todas as soluções inteiras positivas da equação

$$m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1.$$

Problema 3.7. (IMO) Ache todas as soluções inteiras da equação

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Problema 3.8. Seja $p>5$ um primo. Prove que a equação $x^4+4^x=p$ não tem solução inteira.

Problema 3.9. Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$1+x+x^2+x^3=2^y.$$

Problema 3.10. Encontre todos os naturais n para os quais $2^8+2^{11}+2^n$ é um quadrado perfeito.

Problema 3.11. (Alemanha) Encontre todos os pares de inteiros não-negativos (x,y) tais que

$$x^3+8x^2-6x+8=y^3.$$

Problema 3.12. (Reino Unido) Encontre todos os trios de inteiros positivos (a,b,c) tais que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2.$$

Problema 3.13. (Austrália) Prove que a equação $x^4+131=3y^4$ não possui soluções inteiras.

Problema 3.14. (Rioplatense) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação

$$1+2^x+3^y=z^3.$$

Problema 3.15. Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$x^2+y^2=1000003.$$

Problema 3.16. (Balcânica) Prove que a equação $x^5-4=y^2$ não tem solução inteira.

Problema 3.17. (Balcânica) Encontre todas as soluções (x,y) da equação

$$x^y-y^x=xy^2-19,$$

onde x e y são números primos.

Problema 3.18. (Bielorússia) Existem inteiros x e y tais que $3x^2-2y^2=1998$?

Problema 3.19. Prove que não existem inteiros x, y satisfazendo $15x^2-7y^2=9$.

Problema 3.20. Mostre que a equação $x^2+3xy-2y^2=122$ não tem soluções inteiras.

Problema 3.21. Encontre todos os inteiros m,n satisfazendo a igualdade

$$\left|3^m-2^n\right|=1.$$

Problema 3.22. (Índia) Encontre todos os inteiros positivos x,y para os quais $7^x-3^y=4$.

Problema 3.23. (Índia) Encontre todos as soluções inteiras positivas x,y,z,p, p primo, da equação

$$x^p+y^p=p^z.$$

Problema 3.24. (Rússia) Encontre todos os primos p para os quais p^2+11 tenha exatamente seis divisores distintos, incluindo 1 e p^2+11.

Problema 3.25. Mostre que não existe um natural d para o qual os números $2d-1, 5d-1$ e $13d-1$ sejam todos quadrados perfeitos.

Problema 3.26. (Putnam) Dado um inteiro positivo m, encontre todas as triplas (n,x,y) de inteiros positivos, com $mdc(m,n)=1$, que satisfazem a igualdade

$$(x^2+y^2)^m=(xy)^n.$$

Problema 3.27. Prove que 49 não divide n^2+3n+4, qualquer que seja n inteiro.

Problema 3.28. Prove que a equação $x^2=3y^2+8$ não possui soluções inteiras.

Problema 3.29. Encontre todas as soluções inteiras não-negativas da equação

$$3^a+1=5^b+7^c.$$

Problema 3.30. Mostre que não existem inteiros a,b,c para os quais

$$a^2+b^2-8c=6.$$

Problema 3.31. Mostre que a equação diofantina

$$5m^2-6mn+7n^2=1988$$

não possui solução.

Problema 3.32. Seja n um inteiro. Prove que se $2+2\sqrt{28n^2+1}$ é um inteiro, então ele é um quadrado perfeito.

Problema 3.33. (Bulgária) Encontre todos os pares de inteiros (x, y) para os quais $(x^2+y^2)/(x-y)$ é um inteiro que divide 1995.

Problema 3.34. Prove que a equação

$$x^2+y^2+z^2+w^2=2xyzw$$

não possui soluções inteiras positivas.

Problema 3.35. (USAMO) Encontre todas as soluções naturais da equação

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2.$$