Equações e sistemas de equações

Marcelo

SO 2024

1 Equações

Problema 1 (APMO 2021)**.** Prove que para cada real $r > 2$, há exatamente dois ou três reais positivos x satisfazendo a equação $x^2 = r\lfloor x \rfloor$.

Problema 2 (JBMO 2021)**.** Seja n ($n \geq 1$) um inteiro. Considere a equação

$$2 \cdot \lfloor \frac{1}{2x} \rfloor - n + 1 = (n+1)(1 - nx),$$

na variável x.

(a) Resolva a equação para $n = 8$.

(b) Prove que existe um inteiro n para o qual a equação tem pelo menos 2021 soluções.

Problema 3 (OMCPLP 2019)**.** Encontre todos os reais a e b tais que vale a seguinte relação:

$$2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1)$$

2 Sistemas de equações

Problema 4 (Ibero 2018)**.** Para cada inteiro $n \geq 2$, encontre todas as soluções inteiras do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018} \\ x_2 = (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018} \\ \vdots \\ x_n = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018} \end{cases}$$

Problema 5 (JBMO 2020)**.** Encontre todas as triplas de reais (a, b, c) tais que vale o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

Problema 6 (OBM 2023)**.** Seja n um inteiro positivo. Mostre que existem inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *não todos iguais* satisfazendo

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + \cdots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $2n - 1$ é composto.

Problema 7 (Baltic Way TST 2022 (Letônia))**.** Encontre todas as triplas de reais (x, y, z) satisfazendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3. \end{cases}$$

Problema 8 (KöMaL A. 788)**.** Resolva o sequinte sistema de equações nos números reais.

$$x + \frac{1}{x^3} = 2y,\ y + \frac{1}{y^3} = 2z,\ z + \frac{1}{z^3} = 2w,\ w + \frac{1}{w^3} = 2x.$$

Problema 9 (KöMaL C. 1781)**.** Resolva o seguinte sistema de equações nos números reais:

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{y^2 - 21y} = 2x^2 \\ x^2 - x - \sqrt{y^2 - 21y} = x^3 \end{cases}$$

Problema 10 (OMCPLP 2022)**.** Quantas triplas (a, b, c) com $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazem o sistema a seguir?

$$\begin{cases} a^4 - b^4 = c \\ b^4 - c^4 = a \\ c^4 - a^4 = b \end{cases}$$

Problema 11 (Ibero 2021)**.** Sejam a, b, c, x, y, z números reais tais que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 = (a+b)^2 + (x+y)^2 = (b+c)^2 + (y+z)^2 = (c+a)^2 + (z+x)^2$$

Mostre que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.