Geometria com Complexos

Edson Roberto Abe

26 / janeiro / 2024

(i) Reflexão de Z em AB (W)

$$w = \frac{(a - b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$$

(ii) Projeção de Z em AB (M)

$$m = \frac{(\bar{a} - \bar{b})z + (a - b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{2(\bar{a} - \bar{b})}$$

Se a e b pertencem a um círculo de raio 1: $\bar{a} = \frac{1}{a}$ e $\bar{b} = \frac{1}{b}$

=> $w = a + b - ab\bar{z}$

$$m = \frac{z + a + b - ab\bar{z}}{2}$$

(iii) AB perpendicular a CD ⇔ $\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0$

(iv) Z, A, B são colineares ⇔ $\frac{z-a}{z-b} = \overline{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}$

(v) Círculo de raio 1

Baricentro: $g = \frac{a+b+c}{3}$

Ortocentro: h = a + b + c

(vi) Círculo dos 9 pontos: $n_9 = \frac{a+b+c}{2}$

(vii) Números complexos concíclicos

ABCD é cíclico ⇔ $\dfrac{\frac{b-a}{c-a}}{\frac{b-d}{c-d}} = \text{real}$

(viii) AB e CD são concorrentes em Z

$$z = \frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a} - \bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c} - \bar{d})}$$

Se |a| = |b| = |c| = |d| = 1: $z = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$

(ix) Interseção das tangentes externas (a + b ≠ 0): $p = \frac{2ab}{a+b}$

(x) Incentro: Se $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2 \Rightarrow i = -(uv + vw + wu)$

1 – Dado um triângulo arbitrário ABC, sejam P e Q os centros dos quadrados externos aos lados AB e AC, respectivamente. Mostre que, se M é o ponto médio de BC, então o triângulo MPQ é triângulo retângulo isósceles.

2 – Sejam P, Q, R os centros dos quadrados externos aos lados BC, CA, AB, respectivamente do triângulo ABC. Prove que AP = QR e que AP é perpendicular QR.

3 – Dado um quadrilátero convexo arbitrário ABCD e os centros P, Q, R, S dos quadrados externos aos lados AB, BC, CD, DA respectivamente, mostre que PR = QS e PR é perpendicular a QS.

4 (Teorema de Napoleão) – Prove que os centros dos triângulos equiláteros externos ao triângulo ABC arbitrário formam um triângulo equilátero.

5 – ABCDE é um pentágono convexo, tal que AB = BC e CD = DE. Os triângulos ABC e CDE são retângulos, respectivamente, em B e em D. Provar que se M é médio de AE, então o triângulo BDM é retângulo em M e isósceles.

6 (OBM – 2007 – N3) – No quadrilátero convexo *ABCD*, $\angle A + \angle B = 120°$, *AD* = *BC* = 5 e *AB* = 8. Externamente ao lado *CD*, construímos o triângulo equilátero *CDE*. Calcule a área do triângulo *ABE*.

7 (IMO – 1986) – Um ponto P_0 e um triângulo $A_1A_2A_3$ são dados num plano. Define-se $A_S = A_{S-3}$ para todo s ≥ 4. Nós construímos a seqüência P_0, P_1, P_2, P_3, ... de pontos, de modo que o ponto P_{k+1} é a imagem do ponto P_k com rotação de 120º no sentido horário sobre A_{k+1} para k = 0, 1, 2, ... Mostre que se $P_{1986} = P_0$, então o triângulo $A_1A_2A_3$ é regular.

8 – Um hexágono ABCDEF inscrito num círculo de raio R, temos que AB = CD = EF = R. Sejam M, N e P os pontos médios de BC, DE e FA, respectivamente. Prove que o triângulo MNP é um triângulo equilátero.

9 – Seja ABC um triângulo equilátero com raio do círculo circunscrito igual a 1. Prove que para qualquer ponto P sobre o circuncírculo, temos $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$.

10 – Seja um triãngulo ABC com ortocentro H e P sobre (ABC).

(a)Mostre que existe a reta de Simson, os pé de P sobre AB, BC e AC são colineares.

(b) Mostre que a reta de Simson passa pelo ponto médio de PH.

11 (OBM – 2022 – N3) – Seja ABC um triângulo acutângulo, com AB < AC. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente. Seja Q a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, Q, I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.