Grafos

Yvens Ian

27ª Semana Olímpica - 26 de janeiro de 2024

---

1 Definições

Definição 1 (Grafo) Um grafo $G = (V, A)$ é constituído por um conjunto V de vértices e um conjunto A de arestas, que são pares de vértices. Normalmente representamos V como pontos e A como linhas ligando pares de pontos.

Definição 2 (Grafo Orientado) Um grafo orientado, ou grafo direcionado, ou digrafo, é um grafo cujas arestas possuem uma orientação. Representamos essa orientação por uma seta. Por exemplo, uma aresta ligando a, b é diferente de uma ligando b, a.

Definição 3 (Subgrafo) Um subgrafo $G' = (V', A')$ de um grafo $G = (V, A)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

Definição 4 (Subgrafo Induzido) Um subgrafo G' de G é um subgrafo induzido se, para qualquer par de vértices x e y de G', (x, y) é uma aresta de G' se e somente se (x, y) é uma aresta de G.

Definição 5 (Grafo Simples) Um grafo é simples se ele não tem arestas ligando vértices iguais, nem mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices.

Definição 6 (Vizinhança) Dado um grafo $G = (V, A)$, e $v \in V$, chamamos $N(v)$ a vizinhança de v, o conjunto de vértices para os quais existe uma aresta entre esse e v.

Definição 7 (Grau) Definimos $\deg(v) = |N(v)|$ o grau de v, quantidade de arestas que v pertence.

Definição 8 (Grau Orientado) Em um grafo orientado, chamamos $out(v)$, o grau de saída, e $in(v)$, o grau de entrada, a quantidade de arestas partindo de v e chegando em v, respectivamente.

Definição 9 (Caminho) Em um grafo $G = (V, A)$, um caminho é uma sequência finita ou infinita de vértices conectados por arestas, ou seja, dizemos que $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$ é um caminho se $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_{k-1}, u_k) \in A$.

Definição 10 (Conexidade) Um grafo $G = (V, A)$ é dito conexo, quando para todo par de vértices $v, w \in V$ existe um caminho de arestas de v para w. Em um grafo desconexo, os subconjuntos de vértices conectados são chamados de componentes conexas.

Definição 11 (Ciclo) Um ciclo é um caminho no qual o primeiro e o último vértices são o mesmo, mas nenhum outro vértice é repetido.

Definição 12 (Árvore) Uma árvore é um grafo conexo e acíclico (sem ciclos).

Definição 13 (Floresta) Uma floresta é um grafo acíclico. Por consequência, toda componente conexa de uma floresta é uma árvore.

Definição 14 (Grafo Completo) Um grafo completo é um grafo simples em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices, ou seja, há uma aresta ligando quaisquer dois vértices. Geralmente denotamos o grafo completo de n vértices como K_n.

Definição 15 (Clique) Um subgrafo induzido com n vértices de um grafo G é chamado de n-clique se for um grafo completo.

Definição 16 (Grafo Planar) Um grafo é dito planar se é possível desenhar o mesmo no plano de forma que nenhuma aresta cruza outra aresta.

Definição 17 (Grafo Euleriano) Em um grafo finito, um caminho euleriano é um caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um ciclo euleriano é um caminho euleriano que termina no mesmo vértice que começou. Quando um grafo G possui um ciclo euleriano, denominamos G um grafo euleriano.

Definição 18 (Grafo Hamiltoniano) Em um grafo finito, um caminho hamiltoniano é um caminho que passa por todos os vértices do grafo exatamente uma vez. Um ciclo hamiltoniano é um caminho euleriano que termina no mesmo vértice que começou. Quando um grafo G possui um ciclo hamiltoniano, denominamos G um grafo hamiltoniano.

Definição 19 (Grafo Bipartido) Um grafo bipartido $G = (V, A)$ é um grafo onde é possível particionar o conjunto de vértices V em V_1 e V_2 de maneira que não existam arestas ligando dois vértices de V_1, nem dois de V_2.

Definição 20 (Grafos Isomorfos) Dois grafos são ditos **isomorfos** se eles representam as mesmas conexões. Em outras palavras, podemos redesenhar um dos grafos mantendo suas respectivas conexões e obter o outro.

2 Teoremas

Teorema 1 Em um grafo $G = (V, A)$, vale que

$$\sum_{x \in V} \deg(v) = 2|A|.$$

Em um grafo orientado, vale que

$$\sum_{v \in V} in(v) = \sum_{v \in V} out(v) = |A|.$$

Teorema 2 Todo grafo pode ser dividido em um conjunto de componentes conexas.

Teorema 3 Toda árvore com pelo menos 2 vértices possui pelo menos 2 folhas (vértices de grau 1).

Teorema 4 Todo grafo conexo com n vértices possui pelo menos $n - 1$ arestas e a igualdade ocorre se, e somente se, o grafo é uma árvore.

Teorema 5 Se um grafo de n vértices possui k componentes conexas, ele possui pelo menos $n - k$ arestas (exatamente caso seja acíclico).

Teorema 6 Todo grafo G com n vértices e pelo menos n arestas possui um ciclo.

Teorema 7 (Árvore Geradora) Todo grafo conexo G possui uma árvore que contém todos os seus vértices. Essa árvore é chamada de uma árvore geradora de G (um grafo pode ter diversas árvores geradoras).

Teorema 8 (Fórmula de Euler) Em um grafo planar G vale a fórmula

$$V - A + F = 2,$$

onde V é a quantidade de vértices, A de arestas e F de faces de G (perceba que uma das faces é a de fora e tem área infinita).

Teorema 9 (Teorema de Kuratowski) Um grafo finito é planar se, e somente se, não contém um subgrafo que é uma subdivisão de K_5 (o grafo completo em cinco vértices) ou de $K_{3,3}$ (grafo bipartido completo em seis vértices, três dos quais se conectam a cada um dos outros três).

Teorema 10 Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém um ciclo de tamanho ímpar.

Teorema 11 Um grafo é euleriano se, e somente se, todos seus vértices possuem grau par. Um grafo possui caminho euleriano se, e somente se, no máximo 2 de seus vértices possuem grau ímpar.

Teorema 12 Todo grafo completo direcionado possui um caminho Hamiltoniano.

Teorema 13 (Dirac) Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2}, \text{ para todo vértice } v \text{ de } G,$$

então, G é Hamiltoniano.

Teorema 14 (Ore) Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se para todo par de vértices não adjacentes de G a soma de seus graus é maior ou igual a n, então, G é Hamiltoniano.

Teorema 15 (Casamentos de Hall) Um casamento é um subconjunto das arestas de um grafo onde não há arestas adjacentes. Em um grafo bipartido cujos vértices são divididos em A e B, existe um casamento cobrindo todos os vértices de A se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo subgrafo S de A.

Teorema 16 (Turán) Em todo grafo $G = (V, A)$ com $n = |V|$ que não possui um $(r+1)$-clique tem-se que

$$|A| \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

3 Problemas

Problema 1 (Ramsey) Seja G um grafo completo com 6 vértices e cujas arestas são pintadas de vermelho ou azul. Mostre que existe um triângulo monocromático em G.

Problema 2 Seja $G = A \cup B$ um grafo bipartido de $2n$ vértices e grau mínimo $n/2$, onde $|A| = |B| = n$. Mostre que G possui um emparelhamento perfeito, ou seja, podemos dividir todos os vértices de G em pares de forma que cada par seja ligado por uma aresta.

Problema 3 (Rússia) Em um torneio nacional de futebol, participam 20 equipes. Qual é o número mínimo de partidas que deve ter o torneio para que, dentre quaisquer três equipes, haja duas que joguem entre si?

Problema 4 Os $2n$ cavaleiros do reino de Gugulândia estão se preparando para uma reunião. Cada um deles tem no máximo $n-1$ inimigos. Prove que Darlados, o mago, pode posicioná-los ao redor de uma mesa circular de modo que ninguém esteja sentado ao lado de um inimigo.

Problema 5 (Treinamento Cone Sul 2013) Existem $n \geq 5$ pessoas em uma festa. Suponha que entre quaisquer três pessoas na festa existem pelo menos duas se conhecem. Mostre que podemos selecionar pelo menos $n/2$ pessoas e arranjá-las em torno de uma mesa circular de modo que cada pessoa fique sentada entre dois de seus amigos.

Problema 6 (Lista Cone Sul 2013) Numa reunião de $12k$ pessoas, cada pessoa cumprimenta exatamente $3k+6$ outras. Para quaisquer duas pessoas o número de pessoas que cumprimentou ambas é o mesmo. Quantas pessoas estavam na reunião? (Não é necessário exibir o exemplo)

Problema 7 (Baltic Way 2013) Papai Noel tem pelo menos n presentes para dar a n crianças. Para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, a i-ésima criança gostaria de receber $x_i > 0$ desses presentes. Assuma que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Mostre que o Papai Noel consegue dar a cada criança um presente que ela goste.

Problema 8 Suponha que um baralho de cartas normal de 52 cartas foi dividido em 13 pilhas de 4 cartas cada.

Prove que pode-se escolher uma carta de cada pilha de modo que haja entre as escolhidas uma carta de cada número (1 a 13).

Problema 9 (OCM 2019) A superfície de um planeta esférico é dividida entre os países de uma federação, de tal forma que nenhum país engloba outros países, cada país faz fronteira com exatamente três outros e nenhuma fronteira entre dois países se reduz a um ponto. Nesse planeta, uma "tríplice fronteira"é um ponto em que as fronteiras de três países se encontram. Por outro lado, uma "aliança geopolítica"é um grupo $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de países, tal que p_i faz fronteira com p_{i+1}, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (com $p_{k+1} = p_1$). Sabendo que não há alianças geopolíticas com mais de cinco países, mostre que o planeta tem no máximo quatro tríplices fronteiras. Além disso, mostre que a igualdade ocorre se, e só se, o planeta tiver exatamente quatro países.

Problema 10 (APMO 2008) Em uma sala de 46 pessoas, os estudantes formam grupos de três pessoas de modo que quaisquer dois grupos distintos têm no máximo um estudante em comum. Prove que existe um conjunto de 10 alunos no qual não há um grupo inteiro dentro.

Problema 11 Um tabuleiro $n \times n$ possui alguns quadrados pintados de azul. Assuma que para quaisquer n quadrados escolhidos, não dois na mesma linha ou mesma coluna, há pelo menos um quadrado azul. Prove que é possível encontrar a linhas e b colunas cujas interseções contêm somente quadrados azuis, de forma que $a + b \geq n + 1$.

Problema 12 (Teste Cone Sul 2020) Entre os estados de Alinaesquina e Berlinda, cada estrada liga uma cidade de Alinaesquina a uma cidade de Berlinda. Todas as estradas são de mão dupla, e entre quaisquer duas cidades é possível viajar de uma a outra, utilizando apenas essas (possivelmente mais de uma) estradas. Além do mais, sabe-se que, a partir de qualquer cidade de qualquer um dos dois estados, sai o mesmo número k de estradas. Sabemos que $k \geq 2$.

Prove que os governos dos estados podem fechar qualquer uma das estradas, e ainda assim existirá uma rota (possivelmente passando por várias estradas) entre quaisquer duas cidades.

Problema 13 (Lista Cone Sul 2014) Numa vila com pelo menos um habitante, existem algumas associações. Sabe-se que cada habitante é membro de pelo menos k associações e que quaisquer duas associações têm no máximo um membro em comum. Prove que pelo menos k associações têm o mesmo número de membros.

Problema 14 (MOP 2008) As arestas de um grafo completo de n vértices são coloridas de forma que nenhuma cor é usada em mais de $n-2$ arestas. Prove que existe um triângulo com três cores distintas.

Problema 15 (ISL 2021) Seja S um conjunto infinito de inteiros positivos, de forma que existem quatro números dois a dois distintos $a, b, c, d \in S$ onde $\text{mdc}(a, b) \neq \text{mdc}(c, d)$. Prove que existem três números dois a dois distintos $x, y, z \in S$ tais que $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(y, z) \neq \text{mdc}(z, x)$.

Problema 16 (OBM 2005) Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar.

Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

Depois de terminar o problema, tente generalizar para $2n$ baterias, onde metade estão carregadas e metade não estão.

Problema 17 (Teste Cone Sul 2013) Existem 25 casas em Colorândia. Sabe-se que entre quaisquer duas casas, existe uma única rua e que ela está pintada de alguma cor. Além disso, para quaisquer três casas, sempre existem duas ruas de uma mesma cor partindo de uma delas em direção às outras duas. Prove que existe uma casa da qual partem pelo menos 10 ruas de uma mesma cor para outras casas de Colorândia.

Problema 18 (India TST 2019) Seja n um natural. Um tabuleiro $2k \times 2k$ será coberto completamente por $2k^2$ dominós, cada um de tamanho 1×2 ou 2×1. Analisemos duas coberturas completas: uma apenas com dominós verdes e outra apenas com amarelos. Dizemos que duas casinhas 1×1 são vizinhas verdes quando ambas são cobertas pelo mesmo dominó verde e vizinhas amarelas pelo mesmo dominó amarelo. Sabendo que é possível atribuir um inteiro não-nulo a cada casinha 1×1 de modo que tal inteiro seja o número de seu vizinho verde menos o de seu vizinho amarelo, prove que $3|k$.

Problema 19 (USATST 2020) Para um grafo simples finito G, definimos G' como o grafo de mesmos vértices que G, onde para quaisquer dois vértices $u \neq v$, o par $\{u, v\}$ é uma aresta de G' se e só se u e v possuem um vizinho em comum em G.

Prove que se G é um grafo finito simples isomorfo a $(G')'$, então G também é isomorfo a G'.

Problema 20 (ISL 2010) Em um planeta existem 2^N países ($N \geq 4$). Cada pais tem uma bandeira $1 \times N$ composta de N faixas 1×1, cada qual amarela ou azul. Não há dois países com mesma bandeira. Dizemos que um conjunto de N bandeiras é diversificado se podem ser arranjadas em um quadrado $N \times N$ de forma que as N faixas na diagonal principal são todas de mesma cor. Determine o menor inteiro positivo M tal que para quaisquer M bandeiras distintas, existem N formando um conjunto diversificado.

Problema 21 (China 2017) Considere um retângulo R particionado em 2016 retângulos menores de forma que os lados desses sejam paralelos aos de R. Para cada segmento ligando dois vértices, chame-o de básico se não há outro vértice nele. (Os segmentos devem ser da partição.) Encontre o máximo e o mínimo número possível de segmentos básicos sobre todas as possíveis partições de R.

Problema 22 (USATST 2011) Na nação de Onewaynia, certos pares de cidades são conectados por estradas. Toda estrada conecta exatamente duas cidades. Algumas estradas têm uma capacidade de tráfego de 1 unidade e outras de 2 unidades. Porém, em toda estrada, o tráfego é permitido somente em uma direção. Sabe-se que para toda cidade, a soma das capacidades das ruas conectadas a ela é sempre ímpar. O ministro do transporte precisa definir uma direção para cada estrada. Prove que ele pode fazer isso de forma que, para toda cidade, a diferença entre a soma das capacidades das ruas entrando e das saindo é exatamente um.

4 Dicas

Colocarei algumas dicas para cada questão, se não forem suficientes, ou se quiserem perguntar algo, podem mandar um e-mail para yvensianpporto@gmail.com.

Dicas Prob. 1 **(1)** Tome um vértice v de G, por PCP, há 3 arestas de mesma cor que saem de v.

Dicas Prob. 2 **(1)** Teorema dos Casamentos de Hall.

Dicas Prob. 3 **(1)** Defina um grafo G onde os vértices são as equipes e as arestas ligam duas equipes que **não** jogaram contra. **(2)** Esse grafo não tem um 3-clique, então, use o teorema de Turán.

Dicas Prob. 4 **(1)** Teorema de Dirac.

Dicas Prob. 5 **(1)** Monte um grafo onde cada pessoa é um vértice e a relação de amizade define as arestas. Queremos mostrar que há um ciclo de tamanho pelo menos $n/2$. **(2)** Faça indução de n para $n+2$, com a hipótese de que esse ciclo existe.

Dicas Prob. 6 **(1)** Faça uma contagem dupla no número de "chifres"do grafo, ou seja, triplas (A, B, C) onde B é ligado a A e a C. **(2)** Por um lado, esse número é igual a $\binom{3k+6}{2} \cdot 12k$, pois cada pessoa tem $3k+6$ amigos. **(3)** Por outro lado, esse número é igual a $\binom{12k}{2} \cdot a$, onde a é o número de pessoas que cumprimentou duas pessoas, tendo em vista que é o mesmo para qualquer dupla.

Dicas Prob. 7 **(1)** Monte um grafo bipartido ligando cada criança i aos x_i presentes que ela gostaria de receber. **(2)** Buscamos um emparelhamento perfeito, então, use o teorema de Hall.

Dicas Prob. 8 **(1)** Faça um grafo bipartido $G = A \cup B$ no qual cada pilha é um vértice de A e cada número de carta é um vértice de B. Uma aresta indica se uma pilha tem uma carta (note que podemos ter mais de uma aresta ligando dois vértices). **(2)** Use o Teorema de Hall.

Dicas Prob. 9 **(1)** Faça um grafo onde cada país é um vértice e trace arestas caso os países façam fronteira. Uma tríplice fronteira é um triângulo e uma aliança geopolítica é um ciclo. **(2)** Note que esse grafo é planar e que cada vértice tem grau 3.

Dicas Prob. 10 **(1)** Considere S como o maior conjunto que não possui um grupo inteiro dentro. **(2)** Suponha que $|S| \leq 9$ e encontre um vértice v fora de S tal que $S + \{v\}$ satisfaz o problema, gerando um absurdo.

Dicas Prob. 11 **(1)** Tome um grafo bipartido onde em uma partição C há n vértices, as colunas do tabuleiro, e na outra, L, há n vértices, as linhas do tabuleiro. **(2)** Ligue dois vértices se o quadrado que representa a interseção da linha e coluna respectivas **não** for azul. **(3)** Pela condição, não há um emparelhamento perfeito, então, use o Teorema de Hall. **(4)** Há um conjunto $S \subseteq C$ tal que $|N(S)| < |S|$. **(5)** Olhe pro subgrafo $S \cup (L \setminus N(S))$.

Dicas Prob. 12 **(1)** Monte um grafo bipartido no qual uma partição é Alinaesquina e a outra é Berlinda, esse grafo é conexo e todo vértice tem grau k. **(2)** Suponha que o enunciado é falso e considere as cidades a de Alinaesquina e b de Berlinda tais que removendo a aresta (a, b) o grafo se torna desconexo. **(3)** Considere as componentes conexas que sobram e separe cada uma partições de Alinaesquina e de Berlinda. **(4)** Faça contagem dupla na quantidade de arestas de uma das componentes e ache um absurdo.

Dicas Prob. 13 **(1)** Suponha o contrário, ou seja, no máximo $k-1$ associações têm a mesma quantidade de membros. **(2)** Seja m a quantidade de associações, então, $m \leq (k-1) \cdot x$, onde x é a quantidade de membros da associação máxima, pois no máximo $k-1$ têm 1 membro, $k-1$ têm 2 membros, etc. **(3)** Olhe para tal associação máxima, e mostre que $x \leq \frac{m-1}{k-1}$, gerando um absurdo.

Dicas Prob. 14 **(1)** Suponha o contrário e considere a maior componente conexa monocromática do grafo. **(2)** Pelas condições do enunciado, há um vértice fora dela. **(3)** Analise a coloração desse vértice para essa componente.

Dicas Prob. 15 **(1)** Construa um grafo onde cada vértice é um número de S, e para cada par de vértices u, v pintamos sua aresta com a "cor"mdc (u, v). **(2)** Suponha o enunciado falso e tome um vértice v qualquer. De v saem infinitas arestas de uma mesma cor, digamos, azul, pois há finitos mdc's possíveis com v, e infinitos números no conjunto. Pela suposição, todos os vizinhos azuis de v também se ligam com arestas azuis, formando, assim, um clique azul infinito, chame-o de C. **(3)** Tome um vértice u fora de C, que existe, pela condição do enunciado. Como há infinitos vértices em C e finitas cores que podem sair de u, então, há dois vértices de C, x e y, tais que (u, x) e (u, y) têm a mesma cor, e não é azul, gerando um absurdo.

Dicas Prob. 16 **(1)** Note que a estratégia para encontrar duas baterias deve servir pra qualquer configuração, então, para garantir isso, não podem existir quatro baterias sem nenhum teste entre elas, senão, pode ser que as quatro sejam carregadas. **(2)** Monte um grafo, onde ligamos dois vértices (baterias) se **não** os testamos na estratégia. Esse grafo não pode ter um 4-clique. **(3)** Basta usar o teorema de Turán. A resposta é 7.

Dicas Prob. 17 **(1)** Faça contagem dupla no número N de chifres, ou seja, a quantidade de triplas (A, B, C) nas quais as arestas de B para A e para C têm a mesma cor. **(2)** Se há c cores no total, e d_i é a quantidade de caminhos da cor i partindo de uma cidade X, temos que $d_1 + d_2 + \cdots + d_c = 24$ e que a quantidade de triplas boas com X sendo o número do meio é $\sum 2 \cdot \binom{d_i}{2}$. Note, também, que pelo enunciado, $N \geq 2 \cdot \binom{25}{3}$. Agora, suponha $d_i \leq 9$ e tente encontrar um absurdo!

Dicas Prob. 18 **(1)** Perceba que não existem casas vizinhas verdes e amarelas simultaneamente. **(2)** Monte um grafo no qual os vértices são as casas e as ligamos com uma aresta verde se forem vizinhas verdes e com uma amarela se forem vizinhas amarelas. **(3)** Perceba que cada vértice está em um ciclo, pois todo vértice tem grau dois. **(4)** Analise os ciclos com os inteiros designados a cada casa e mostre que todo ciclo tem um tamanho múltiplo de 12.

Dicas Prob. 19 **(1)** Tente achar grafos que permanecem isomorfos após uma operação. **(2)** Cliques e ciclos ímpares permanecem constantes. **(3)** Suponha que o grafo possua um clique e mostre que esse deve estar isolado, ou seja, deve ser uma componente conexa. **(4)** Mostre que os outros vértice de G não podem ter grau maior ou igual a 3. **(5)** Por fim, basta analisar ciclos e caminhos, as únicas componentes possíveis com grau máximo 2.

Dicas Prob. 20 **(1)** A resposta é $M = 2^{n-2} + 1$. **(2)** Monte um grafos bipartido no qual o conjunto de vértices é $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 representa as N faixas e V_2 as 2^N bandeiras. Cada aresta é colorida de azul ou amarelo. **(3)** Queremos um emparelhamento perfeito em alguma das cores desse grafo. **(4)** Suponha que não há tal emparelhamento e use Hall para formar um absurdo.

Dicas Prob. 21 **(1)** Considere um grafo no qual os vértices são os vértices dos retângulos da partição, e as arestas representam os segmentos básicos. **(2)** Perceba que só temos vértices de grau 2, 3 ou 4. Defina, então, a quantidade de vértices de cada tipo como v_2, v_3, v_4. **(3)** $v_2 = 4$ **(4)** $2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = 2|A|$ **(5)** $4 \cdot 2016 = 4 \cdot \#ret = v_2 + 2v_3 + 4v_4$. **(6)** Equacionando, $|A| = 4034 + \frac{v_3}{2}$. Para o máximo, v_3 deve ser máximo, e para o mínimo, v_3 deve ser mínimo **(7)** Para maximizar v_3, devemos minimizar v_4. **(8)** Para minimizar v_3, precisamos de mais informação. Seja l a quantidade de linhas na partição de R e c de colunas. $n_3 = 2l + 2c$, pois cada ponta gera um n_3. **(9)** $(l+1)(c+1) \geq 2016$, pois $(l+1)(c+1)$ é a quantidade de retângulos caso cada linha e coluna fosse de uma borda a outra de R. **(10)** Use M.A. e M.G. para encontrar o valor mínimo de n_3.

Dicas Prob. 22 **(1)** Considere um grafo G no qual cada cidade é um vértice e as arestas representam as estradas, onde cada estrada tem um "peso"de 1 ou 2, queremos orientar o grafo da forma que explica o enunciado. **(2)** Monte um grafo G^* mais fácil de trabalhar, removendo algumas arestas de G, formando um grafo mais simples e que ainda obedece o enunciado. **(3)** Primeiro, se temos um vértice A e um B de G ligados por duas estradas iguais, podemos "remover"essas estradas em G^*, pois basta colocar uma em uma direção e a outra em outra, que elas se "cancelam"em G. **(4)** O mesmo vale para uma estrada 1 e uma estrada 2, mas aí teríamos que substituí-las por outra estrada 1 na direção contrária da primeira. **(5)** Se existem cidades A, B, C tais que AB tem o mesmo valor de AC em G, podemos substituí-las em G^* por uma aresta em BC com o mesmo valor. **(6)** Veja que G^* tem grau máximo 2, então, cada componente conexa do mesmo é um ciclo ou um caminho.