Problemas em Invariantes e Monovariantes

Prof. George Lucas

Semana Olímpica 2024 - Nível 2

1. Inicialmennte os números $3, 4$ e 12 estão escritos em uma folha de papel. Em cada passo, devem-se escolher dois números a e b e substituí-los por $0.6a + 0.8b$ e $0.8a - 0.6b$.
(a) É possível, em algum momento, obter os números $4, 6$ e 12?
(b) É possível, em algum momento, obter números x, y e z tais que $|x-4| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |y-6| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |z-12| < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

2. Cada um dos números de 1 a 10^6 é repetidamente substituído pela soma de seus dígitos até obtermos 10^6 números de um dígito. Teremos mais 1s ou 2s?

3. O número 999...9(19979s) é escrito no quadro. A cada minuto, um dos números escritos no quadro é fatorado em dois fatores e é apagado do quadro. Cada um desse fatores é (independentemente) acrescentado ou diminuído de duas unidades, e os dois números resultantes são escritos no quadro. É possível, em algum momento, obter todos os números escritos no quadro iguais a 9?

4. Um círculo é dividido em seis setores. Então os números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ são escritos nos setores, no sentido antihorário. Uma operação permitida é adicionar uma unidade em dois setores vizinhos. É possível, após um número finito de operações, obter todos os números dos setores iguais?

5. Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$ escreve-se um número real. Uma operação consiste em trocar todos os sinais de uma linha ou coluna. Prove que, realizando algumas operações, é possível obter um novo tabuleiro para o qual a soma de cada linha e coluna é não-negativa.

6. Em cada vértice de um quadrado temos certa quantidade de fichas (possivelmente nenhuma). Uma operação permitida é remover certa quantidade de fichas de um vértice e colocar o dobro de fichas em um dos vértices adjacentes a este. Suponha que começamos com apenas uma ficha em algum dos vértices, e os outros três vértices estando vazios. É possível, após certo número de movimentos, termos $1, 9, 8, 9$ fichas nos vértices do quadrado, quando este é percorrida no sentido horário?

7. Há a fichas, b fichas pretas e c fichas vermelhas em uma mesa. Em cada passo trocamos duas fichas de cores diferentes por uma da terceira cor. Determine as condições necessárias e suficientes para a, b, c tal que é possível chegarmos a apenas uma ficha no final.

8. (IMO Shortlist) Os números de 1 a n são colocados em ordem arbitrária. Definimos uma operação como segue: Se o primeiro número da sequência é k, então invertemos a ordem dos k primeiros números na sequência (então o primeiro se torna o k-ésimo, o segundo se torna o $(k-1)$-ésimo e assim sucessivamente). Prove que após um número finito de operações, o primeiro termo será 1.

9. (OBM 2004) Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto no quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete este procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas pilhas são multiplicadas e o produto é escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter todas as pilhas com uma pedra. Quais são os possíveis valores da soma de todos os números escritos no quadro.

10. (Bulgaria) Há 2000 bolas brancas em uma caixa. Há ainda um número suficiente de bolas brancas, verdes e vermelhas fora da caixa. As seguintes operações são permitidas com as bolas:
(a) Trocar duas bolas brancas por uma verde;
(b) Trocar duas bolas vermelhas por uma verde;
(c) Trocar duas bolas verdes por uma branca e uma vermelha;
(d) Trocar uma bola branca e uma verde por uma vermelha;
(e) Trocar uma bola verde e uma vermelha por uma branca.
Após uma quantidade finita de operações, restam três bolas na caixa. Prove que ao menos uma delas é verde. Existe um número finito de operações que deixa na caixa somente uma bola?

11. Considere um conjunto de pessoas. Prove que é possível dividir o conjunto em dois grupos de modo que cada pessoa tenha uma quantidade de amigos no outro grupo maior ou igual a quantidade de amigos no grupo que está. Considere a amizade como uma relação recíproca.

12. Inicialmente temos $n > 1$ números escritos em uma lousa. Uma operação permitida com esses números é escolher dois deles, digamos a e b, apagá-los, e escrever na lousa $\frac{a+b}{4}$. Se inicialmente todos os números escritos eram iguais a 1, prove que quando restar apenas um número, ele será maior ou igual a $\frac{1}{n}$.

13. Seja c um inteiro positivo. São escritos n números inteiros em um quadro.

Uma operação consiste em escolher dois números escritos x e y, $0 \leq x - y \leq c$, e substituí-los por $x + 1$ e $y - 1$. Prove que, após um número finitos de operações, não será possível realizar mais operação alguma.

14. Cada termo da sequência $1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$ começando pelo sétimo é o último dígito da soma dos seis últimos termos. Prove que a subsequência de seis termos consecutivos $0, 1, 0, 1, 0, 1$ nunca aparece.

15. (IMO Shortlist) Considere 2009 cartas, cada uma com um lado luminoso e um lado negro enfileirados paralelamente sobre uma longa mesa. Dois jogadores, do mesmo lado da mesa, Luke e Darth, jogam um jogo com movimentos alternados. Cada movimento consiste em escolher um bloco de 50 cartas consecutivas, cuja mais à esquerda exiba seu lado luminoso, e virá-las. Assim as que exibem o lado luminoso passam a exibir o lado negro e vice-versa. Quem não puder mais realizar um movimento, perde.
(a) Prove que o jogo necessariamente termina.
(b) Sabendo que Luke é o primeiro a jogar, quem tem a estratégia vencedora?

16. Considere as palavras formadas pelas letras a e b. São permitidas as seguintes operações:
(i) Trocar um bloco aba por um bloco b e vice-versa;
(ii) Trocar um bloco bba por um bloco a e vice-versa.
É possível obter a sequência $baa...a$ (com $2023as$) a partir da sequência $aaa...ab$ (com $2023as$)?

17. Os números 1 a 100 são escritos em um tabuleiro em um tabuleiro 10×10 tal que a intersecção da i-ésima linha com a j-ésima coluna tem escrito o número $10(i-1)+j$. Em cada passo realizamos o seguinte movimento: escolhemos uma casa e dois de seus vizinhos opostos (isto é, o de cima e o de baixo ou o da direita e da esquerda e decrescemos duas unidades desse número e acrescentamos uma unidade a cada um de seus vizinhos escolhidos ou acrescentamos duas unidades a esse número e decrescemos uma unidade de cada um de seus vizinhos escolhidos. Após um número finito de movimentos, obtemos novamente os números $1, 2, ..., 100$ em alguma ordem. Prove que eles estão na mesma ordem que estavam no início.

18. (Teste Cone Sul 2016) Em uma lousa estão escritos alguns números inteiros. Wesley pode fazer duas operações com os números escritos na lousa. A operação $safa$ consiste em apagar dois número n e $n + 1$ e escrever o número $n - 2$. A operação $fadao$ consiste apagar dois números n e $n + 4$ e escrever o número $n - 1$. Wesley pode fazer $safa$ ou $fadao$ quantas vezes quiser.
(a) Prove que é possível Wesley escrever uma quantidade finita de inteiros positivos distintos dois a dois na lousa e, usando as operações, obter o número -3. Observe que após as operações podem ter números repetidos, mas não há inteiros positivos repetidos entre os números inicialmente escritos por Wesley.

(b) Prove que, partindo de inteiros positivos distintos dois a dois, não é possível obter um inteiro menor que -3.

19. (Russia) São dados quatro triângulos retângulos congruentes. Uma operação consiste em cortar um dos triângulos ao longo de sua altura relativa a hipotenusa, substituindo-o pelos dois novos triângulos resultantes. Prove que, independente de como realizamos as operações, sempre haverá dois triângulos congruentes.

20. (OBM 2022) Um jogo para uma pessoa tem as seguintes regras: Inicilamente há dez pilhas de pedras, com $1, 2, ..., 10$ pedras, respectivamente. Uma jogada consiste em fazer uma das duas seguintes operações:
(i) escolher duas pilhas, cada uma com pelo menos duas pedras, juntá-las e depois adicionar mais duas pedras a nova pilha;
(ii) escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, tirar duas pedras dela e separá-la em duas pilhas de quantidade de pedras positivas escolhidas pelo jogador.
Tal jogador realiza operações até um momento que não é possível mais realizar operações.
Mostre que o número de pilhas com apenas uma pedra ao final do jogo é sempre o mesmo, independente de como se realizam as jogadas.

21. (Teste Cone Sul 2023) Os números $1, 2, 3, ..., 50$ são escritos em um quadro. Letícia faz as seguintes operações: ela apaga dois números, a e b, do quadro, depois escreve no mesmo o resultado de $a + b$ e anota o número $ab(a + b)$ no seu caderno. Após realizar 49 dessas operações, quando há apenas um número escrito no quadro, Letícia calcula a soma S dos 49 números que escreveu no caderno.
(a) Mostre que S não depende da ordem em que Letícia escolhe os números para realizar as operações.
(b) Encontre o valor de S.