27ª Semana Olímpica

Bento Gonçalves- RS

Professor: Márcio Gomes

Jogos. Estratégias de emparelhamento.

Num jogo posicional, uma estratégia de emparelhamento é uma estratégia que um jogador pode usar para garantir a vitória, ou pelo menos forçar o empate. Baseia-se na divisão das posições no tabuleiro em pares disjuntos. Sempre que o adversário escolhe uma posição num par, o jogador escolhe a outra posição no mesmo par.

Exemplo
Considere a variante 5 por 5 do jogo da velha. Podemos criar 12 pares disjuntos de posições no tabuleiro, denotados por 1,...,12 abaixo:

11	1	8	1	12
6	2	2	9	10
3	7	*	9	3
6	7	4	4	10
12	5	8	5	11

Observe que o elemento central (denotado por *) não pertence a nenhum par; não é necessário nesta estratégia.

Cada linha horizontal, vertical ou diagonal contém pelo menos um par. Portanto, a seguinte estratégia de emparelhamento pode ser usada para forçar um empate: “sempre que seu oponente escolher um elemento do par i, escolha o outro elemento do par i”. No final do jogo, você tem um elemento de cada linha vencedora. Portanto, você garante que o outro jogador não poderá vencer.

Como ambos os jogadores podem usar esta estratégia, o jogo termina empatado.

Este exemplo é generalizado abaixo para um jogo Maker-Breaker arbitrário. Nesse jogo, o objetivo do Maker é ocupar um conjunto vencedor inteiro, enquanto o objetivo do Breaker é evitar isso possuindo um elemento em cada conjunto vencedor.

Estratégia de emparelhamento para Maker
Uma estratégia de emparelhamento para Maker requer um conjunto de pares de elementos tal que:

- Todos os pares são disjuntos;
- Todo conjunto que contém pelo menos um elemento de cada par contém algum conjunto vencedor.

Sempre que o Breaker escolhe um elemento de um par, o Maker escolhe o outro elemento do mesmo par. No final, o conjunto do Maker contém pelo menos um elemento de cada par; pela condição 2, ele ocupa um conjunto vencedor inteiro (isso é verdade mesmo quando Maker joga em segundo lugar).

Estratégia de emparelhamento para Breaker
Uma estratégia de emparelhamento para Breaker requer um conjunto de pares de elementos tais que:

- Todos os pares são disjuntos;
- Cada conjunto vencedor contém pelo menos um par.

Sempre que o Maker escolhe um elemento de um par, o Breaker escolhe o outro elemento do mesmo par. No final, o Breaker possui um elemento em cada par; pela condição 2, ele possui um elemento em cada conjunto vencedor.

Um exemplo de tal estratégia de emparelhamento para o jogo da velha 5 por 5 é mostrado acima.
Outro caso simples em que Breaker tem uma estratégia de emparelhamento é quando todos os conjuntos vencedores são disjuntos entre pares e seu tamanho é pelo menos 2.

1. **(Rio-platense/2010)** Alice e Bob jogam o seguinte jogo. Para começar, Alice organiza os números 1,2, ...,n em alguma ordem seguida e então Bob escolhe um dos números e coloca uma pedra nele. A vez de um jogador consiste em mover a pedra sobre um número que está em uma posição adjacente sob a restrição de que a pedra pode ser colocada no número k no máximo k vezes. Os dois jogadores alternam-se, começando com Alice. O primeiro jogador que não conseguir fazer um movimento perde. Para cada número inteiro positivo n, determine quem tem uma estratégia vencedora

2. (RMM/2018) Ann e Bob jogam nas bordas de uma quadriculado infinita, jogando em turnos. Ann faz o primeiro movimento. Um movimento consiste em orientar qualquer aresta que ainda não recebeu orientação. Bob vence se em algum momento um ciclo for criado. Bob tem uma estratégia vencedora?

3. (JBMO/2023) Alice e Bob jogam o seguinte jogo em um tabuleiro 100 x 100, revezando-se, com Alice começando primeiro. Inicialmente o tabuleiro está vazio. Por sua vez, eles escolhem um número inteiro de 1 a 100^2 que ainda não está escrito em nenhuma das células e escolhem uma célula vazia, e colocam-na na célula escolhida. Quando não há mais nenhuma célula vazia, Alice calcula a soma dos números em cada linha e sua pontuação é o máximo desses 100 números. Bob calcula a soma dos números em cada coluna e sua pontuação é o máximo desses 100 números. Alice vence se sua pontuação for maior que a pontuação de Bob, Bob vence se sua pontuação for maior que a pontuação de Alice, caso contrário, ninguém ganha.

Descubra se um dos jogadores tem uma estratégia vencedora e, em caso afirmativo, qual jogador tem uma estratégia vencedora.

4. (Cone Sul/2020) Ari e Beri jogam usando um baralho com 2020 cartas com exatamente uma carta com cada número de 1 a 2020. Ari pega uma carta com o número a e a remove do baralho. Beri vê a carta, escolhe outra carta do baralho com número b e a retira do baralho. Então Beri escreve no quadro exatamente um dos trinômios x^2-ax+b ou x^2-bx+a de sua escolha. Este processo continua até que não haja mais cartas no baralho. Se no final do jogo todos os trinômios escritos no tabuleiro tiverem soluções inteiras, Beri vence. Caso contrário, Ari vence. Prove que Beri sempre pode vencer, não importa como Ari jogue.

5. (JBMO/2020) Alice e Bob jogam o seguinte jogo: Alice escolhe um conjunto A = {1, 2, ..., n } para algum número natural n ≥ 2. Então, a partir de Bob, eles escolhem alternativamente um número do conjunto A, de acordo com as seguintes condições: inicialmente Bob escolhe qualquer número que desejar, depois o número escolhido em cada etapa deverá ser distinto de todos os números já escolhidos e deverá diferem em 1 de algum número já escolhido. O jogo termina quando todos os números do conjunto A forem escolhidos. Alice ganha se a soma de todos os números que ela escolheu for composta. Caso contrário, Bob vence. Decida qual jogador tem uma estratégia vencedora.

6. (JBMO/2019) Uma tabela 5x100 é dividida em 500 células quadradas unitárias, onde n delas são de cor preta e o restante é de cor branca. Duas células quadradas unitárias são chamadas adjacentes se compartilham um lado comum. Cada uma das células quadradas unitárias tem no máximo duas células quadradas unitárias pretas adjacentes. Encontre o maior valor possível de n.

7. (Lusofonia/2022) Anselmo e Cláudio brincam alternadamente de frutas em uma caixa. A caixa contém inicialmente 32 frutas. Anselmo joga primeiro e cada jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 frutas da caixa ou retirar 2/3 das frutas da caixa (isto só é possível quando o número de frutas que restam na caixa for múltiplo de 3). Ganha o jogador que retirar a última fruta da caixa. Qual destes dois jogadores tem uma estratégia vencedora? Como esse jogador deve jogar para vencer?

8. (Lusofonia/2021) Esmeralda criou um cavalo especial para jogar em tabuleiros quadriláteros idênticos aos tabuleiros de xadrez. Se um cavalo estiver em uma casa, ele poderá mover-se para outra casa movendo 1 casa em uma direção e 3 casas em uma direção perpendicular (que é uma diagonal de um retângulo 2x4 em vez de 2x3 como no xadrez). Neste movimento, ele não pousa nos quadrados entre o quadrado inicial e o quadrado final em que pousa. Uma viagem de comprimento n do cavalo é uma sequência de n quadrados C_1, C_2, ..., C_n que são todos distintos de modo que o cavaleiro começa no quadrado C_1 e para cada i de 1 a n-1 ele pode usar o movimento descrito antes para ir do quadrado C_i ao quadrado $C_{(i+1)}$. Determine o maior N Natural tal que exista um caminho do cavalo de comprimento N em um tabuleiro 5x5.

9. (Cone Sul/2022) Ana e Beto jogam em um tabuleiro de 2022 x 2022. Ana pinta de vermelho os lados de alguns quadrados do tabuleiro, de modo que nenhum quadrado tenha dois lados vermelhos que compartilhem um vértice. A seguir, Bob deve colorir um caminho azul que conecta dois dos quatro cantos do tabuleiro, seguindo as laterais dos quadrados e não usando nenhum segmento vermelho. Se Beto tiver sucesso, ele é o vencedor, caso contrário, Ana vence. Quem tem uma estratégia vencedora?