SO 2024 – Nível 2

Números Grandes e Pequenos

Regis

Problema da OBM 2021 – Nível 2 - Resolvido

6. Seja $\alpha \geq 1$ um número real. Considere o conjunto

$$A(\alpha) = \left\{ \lfloor n\alpha \rfloor \mid n \text{ inteiro positivo} \right\} = \left\{ \lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \lfloor 4\alpha \rfloor, \ldots \right\}.$$

Suponha que todos os inteiros positivos que **não pertencem** ao conjunto $A(\alpha)$ são exatamente os inteiros positivos que deixam um determinado resto r na divisão por 2021, com $0 \leq r < 2021$. Determine todos os possíveis valores de α.

Observação: O símbolo $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{3}$, temos $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = \lfloor 1{,}73\ldots \rfloor = 1$, $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 2 \cdot 1{,}73\ldots \rfloor = 3$, $\lfloor 3\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 3 \cdot 1{,}73\ldots \rfloor = 5$, $\lfloor 4\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 4 \cdot 1{,}73\ldots \rfloor = 6$ e assim por diante. Nesse caso temos $A(\alpha) = \{1, 3, 5, 6, \ldots\}$.

Solução

Se $\alpha \geq 2$, então 1 não está em $A(\alpha)$. Isso implica que 2 tem que estar, $\lfloor \alpha \rfloor = 2$, mas 3 também não estaria em $A(\alpha)$ já que $\lfloor 2\alpha \rfloor \geq 4$ e já teríamos dois restos distintos por 2021. Portanto, $1 \leq \alpha < 2$.

Veja que $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha + \alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$ ou $\lfloor n\alpha \rfloor + 2$. No primeiro caso as partes fracionárias somam menos que 1 e no segundo somam maior que ou igual a 1. Não tem dois $\lfloor n\alpha \rfloor$ iguais.

Vamos fazer o caso $r \geq 1$.

Suponha que $\lfloor n\alpha \rfloor$ pula um certo $2021q + r$. Então $\lfloor k\alpha \rfloor = 2021q + r - 1$ e $\lfloor (k+1)\alpha \rfloor = 2021q + r + 1$. Podemos determinar k. $k = 2021q + r - 1 - q = 2020q + r - 1$, pois é a quantidade de inteiros positivos $\lfloor \alpha \rfloor$, $\lfloor 2\alpha \rfloor$, ..., $\lfloor k\alpha \rfloor$ excluindo os q que possuem resto r por 2021 (de $2021 \cdot 0 + r$ até $2021(q-1) + r$). Logo

$$\lfloor (2020q + r - 1)\alpha \rfloor = 2021q + r - 1$$

$$\Leftrightarrow 2021q + r - 1 \leq (2020q + r - 1)\alpha < 2021q + r$$

$$\Leftrightarrow \frac{2021q + r - 1}{2020q + r - 1} \leq \alpha < \frac{2021q + r}{2020q + r - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2021 + \frac{r-1}{q}}{2020 + \frac{r-1}{q}} \leq \alpha < \frac{2021 + \frac{r}{q}}{2020 + \frac{r-1}{q}}$$

Isso vale para todo inteiro positivo q. Fazendo q suficientemente grande o único valor possível para o número α é $\frac{2021}{2020}$.

Veja que com $\alpha = \frac{2021}{2020}$. Seja $n = 2021q + r$. Temos

$$(n - q)\alpha = (2020q + r) \cdot \frac{2021}{2020} = 2021q + r + \frac{r}{2020}$$

Para $0 \leq r \leq 2019$ temos $\lfloor (n-q)\alpha \rfloor = 2021q + r = n$ e para $r = 2020$ temos $\lfloor (n-q)\alpha \rfloor = 2021q + 2021 = 2021(q+1)$ que deixa resto 0 por 2021.

Veja que $2021q + 2020 - q = 2021(q+1) + 0 - (q+1)$ e, por isso, parece que o resto 0 aparece duas vezes, mas $n - q$ é o mesmo.

Para $r = 0$.Suponha que $\lfloor n\alpha \rfloor$ pula um certo $2021q$ com $q \geq 1$. Então $\lfloor k\alpha \rfloor = 2021q - 1$ e $\lfloor (k+1)\alpha \rfloor = 2021q + 1$.

Temos $k = 2021q - 1 - (q - 1) = 2020q - 2$. Teríamos

$$2021q - 1 \leq (2020q - 2)\alpha < 2021q$$

$$\Leftrightarrow \frac{2021q - 1}{2020q - 2} \leq \alpha < \frac{2021q}{2020q - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2021 - \frac{1}{q}}{2020 - \frac{2}{q}} \leq \alpha < \frac{2021}{2020 - \frac{2}{q}}$$

Fazendo q **suficientemente grande** teríamos no limite $\alpha = \frac{2021}{2020}$.

Já vimos que esse α no caso anterior pula exatamente os números com $r = 2020$. Algebricamente veja que

$$\frac{2021 - \frac{1}{q}}{2020 - \frac{2}{q}} \leq \frac{2021}{2020} \Leftrightarrow 2021 \cdot 2020 - \frac{2020}{q} \leq 2021 \cdot 2020 - \frac{4042}{q} \Leftrightarrow \frac{2020}{q} \geq \frac{4042}{q}$$

Mas isto é uma contradição.

Propostos

1. Seja $d(n)$ o número de divisores positivos do inteiro positivo n. Sejam r e s inteiros positivos tais que $d(k \cdot r) \leq d(k \cdot s)$ para todo k inteiro positivo. Prove que r é um divisor de s.

2. Determine todas as funções $f: Z \to Z$ tais que

$$2000 \cdot f\big(f(x)\big) - 3999 \cdot f(x) + 1999 \cdot x = 0$$

Para todo inteiro positivo x.

3. (Banco IMO/2006) Uma sequência de números reais a_0, a_1, ... é definida pela fórmula:

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \{a_i\}, para\ i \geq 0$$

Aqui a_0 é um número qualquer. Prove que $a_i = a_{i+2}$ para i suficientemente grande.

4. (Canada/2020) Seja $S = \{1,4,8,9,16, \dots\}$ o conjunto de todos os inteiros que são potências perfeitas, ou seja, números da forma n^k onde n e k são inteiros positivos e $k \geq 2$. Seja $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ com os termos em ordem crescente de modo que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Prove que existem infinitos inteiros m tal que 9999 divide a diferença $a_{m+1} - a_m$.

5. (OBMU/2021) Para cada inteiro $n > 1$ seja $k(n)$ o maior inteiro positivo k tal que $n = m^k$ para algum inteiro positivo m. Determine

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n+1} k(j)\ .$$

6. (Ibero/2023) Seja Z o conjunto dos inteiros. Encontre todas as funções $f: Z \to Z$ tais que

$$2023 \cdot f\big(f(x)\big) + 2022 \cdot x^2 = 2022 \cdot f(x) + 2023 \cdot [f(x)]^2 + 1$$

para todo inteiro x.

7. (Cone Sul/2023) Sejam x_1, x_2, ..., x_n números reais positivos. Para cada inteiro k, seja

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

a) Prove que se $S_1 < S_2$, então a sequência S_1, S_2, S_3, ... é estritamente crescente.
b) Prove que existem n e números positivos x_1, x_2, ..., x_n tais que $S_1 > S_2$ e a sequência S_1, S_2, ... não é estritamente decrescente.