Problemas Malemolentes em Álgebra

27ª Semana Olímpica – Bento Gonçalves, RS

Prof. Davi Lopes – Nível 2

1. Exercícios de Aquecimento

Exercício 1: É dado que $p(x) = x^5 + x^2 + 1$ tem como raízes r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5 e $q(x) = x^2 - 2$. Calcule o valor absoluto da expressão:

$$q(r_1) \cdot q(r_2) \cdot q(r_3) \cdot q(r_4) \cdot q(r_5)$$

Exercício 2: (a) Prove que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é um número racional.
(b) Prove que $\sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27+5\sqrt{33}}$ é a raiz cúbica de um número racional.

Exercício 3: Prove que, para todo inteiro positivo n, o número $3^{3^n} + 1$ é o produto de pelo menos $2n+1$ fatores primos, não necessariamente distintos.

Exercício 4 (OMpD/2023): Encontre todos os pares (a,b) de números reais tais que o número $\lfloor an+b \rfloor$ é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo n.

Exercício 5: A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é construída da seguinte forma: $a_1 = a_2 = 1$, e para todo inteiro $n \geq 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{a_n^{2024}}$. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada?

Exercício 6 (Hungria/2000): Se $A = \left(1000 + \sqrt{1000^2+1}\right)^{1000}$, determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de *A* após a vírgula.

Exercício 7**:** Calcule o valor de:

$$N = \frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)\dots(2026^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)\dots(2020^4+324)}$$

Exercício 8: Seja c um número real tal que $c^3 = c+1$. Determine o valor numérico de:

$$\sqrt[3]{3c^2-4c} + c\sqrt[4]{2c^2+3c+2}$$

2. Problemas Propostos

Problema 1 (OMpD/2023): Sejam r_1,r_2,...,r_{2023} as 2023 raízes distintas da equação $x^{2023} = x + 1$. Determine o valor da soma:

$$\frac{r_1}{r_1^2+1}+\frac{r_2}{r_2^2+1}+\dots+\frac{r_{2023}}{r_{2023}^2+1}$$

Problema 2 (OBM/2001 - Variações): Sejam *a, b* e *c* números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de:

(a) $\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)}{\left(a^5+b^5+c^5\right)^2}$

(b) $\frac{a^5+b^5+c^5}{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

(c) $\frac{\left(a^5+b^5+c^5\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^7+b^7+c^7}$

Problema 3 (Ibero/1985): Determine todas as raízes r_1, r_2, r_3, r_4 da equação polinomial $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabendo que elas são reais positivas e que:

$$\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}=1$$

Problema 4: Sendo $n > m \geq 1$ inteiros, prove que:

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{m}\right)<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m-1}\right)$$

Problema 5 (Canadá/2014): Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos cujo produto é igual a 1. Prove que a soma:

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\dots$$
$$+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

É maior ou igual a $\frac{2^n-1}{2^n}$.

Problema 6 (IMO/1979): Sejam m e n inteiros positivos tais que:

$$\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{1317}-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

Prove que m é divisível por 1979.

Problema 7 (OMCPLP/2020): Prove que, para qualquer natural n:

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{9n+7} \right\rfloor$$

Problema 8: Para cada $n \in \mathbb{N}$, ache o maior $k \in \mathbb{N}$ tal que 2^k divide $\left\lfloor \left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1} \right\rfloor$.

Problema 9 (Revista Eureka): Seja α a maior raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\left\lfloor \alpha^{2004} \right\rfloor$ é divisível por 17.

Problema 10 (Vingança Olímpica/2022): Seja $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o número áureo. Prove que existe um inteiro positivo $x < 5^{2022}$ tal que:

$$\left\{ \varphi \sqrt[3]{x} \right\} < \varphi^{-2022}$$

Problema 11 (Ibero/1987): Sejam *m n, p* inteiros positivos tais que:

$$1 + m + n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2p-1}$$

Prove que *m* é um quadrado perfeito.

Problema 12: (a) Uma sequência $\{a_n\}$ é tal que $a_1 = \frac{5}{2}$ e, para todo $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1}^2 - 2$. Calcule o valor do produto $a_1 a_2 ... a_{2024}$.

(b) Uma sequência $\{a_n\}$ é tal que $a_1 = \frac{10}{3}$ e, para todo $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}$. Calcule o valor do produto $a_1 a_2 ... a_{2024}$.

Problema 13 (Teste Cone Sul/2020): Seja a_0, a_1, a_2,... uma sequência de reais periódica (isto é, existe um inteiro positivo fixado k tal que $a_n = a_{n+k}$ para todo inteiro $n \geq 0$, onde k não depende de n). Sabe-se que para todo $n \geq 0$, vale:

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2}\left(a_n - \frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$

Dado que $a_0 = 2020$, qual é o valor de a_1?

Problema 14: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência tal que $a_1 = 4$ e, para todo inteiro positivo n:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

Determine a_n em função de n.

Problema 15: Duas sequências $x_1, x_2, \dots$ e $y_1, y_2, \dots$ de números reais satisfazem $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$ e para todo $n \geq 1$ inteiro:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

Prove que $2 < x_n y_n < 3$, para todo $n \geq 2$ inteiro.

Problema 16 (OBM/2023): Seja $n > 1$ um inteiro. Mostre que existem inteiros $x_1, x_2, \dots, x_n$, não todos iguais, satisfazendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $2n - 1$ é composto.

Problema 17 (OBM/2023 – Adaptada): Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 - x = yz \\ y^2 - y = zx \\ z^2 - z = xy \end{cases}$$

Problema 18 (OBM/2022 - Adaptada): Os números reais a, b, c são diferentes de zero e cumprem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + ab = c \\ b + bc = a \\ c + ca = b \end{cases}$$

(a) Determine os possíveis valores de abc.

(b) Resolva o sistema.

Problema 19: A sequência $\{x_n\}$ é definida por $x_1 = 4$, $x_2 = 19$ e, para cada $n \geq 2$:

$$x_{n+1} = \left\lceil \frac{x_n{}^2}{x_{n-1}} \right\rceil$$

Prove que $x_n - 1$ é sempre um múltiplo de 3.

Problema 20: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência com $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e, para todo $n > 1$:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}$$

Prove que $2a_n a_{n+1} + 1$ é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo n.

Problema 21: Determine todas as funções $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \ ; \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$$

Problema 22 (China - Adaptado): Dado um natural $n > 1$, prove que existem $2n$ inteiros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ tais que:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

$$n - 1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{2024}$$

Problema 23 (Peru EGMO TST/2019): Defina a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ de números reais recursivamente por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2019}$, para todo $n = 0,1,\ldots,2018$. Prove que $a_{2019} < \frac{1}{2} < a_{2018}$.

Problema 24: Os números $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ são tais que $x_1 = \frac{1}{2}$ e, para todo $1 \leq n \leq 99$,

$$x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \ldots x_n$$

Prove que $x_{1000} > 0{,}999$.

Problema 25: Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência tal que $a_1 = 5$ e, para todo $n \geq 1$ inteiro:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}$$

Determine o valor do maior inteiro menor do que a_{2021}.