Teoria Combinatória dos Números

Prof. Onofre Campos

onofrecampos@gmail.com

A seguir estudaremos técnicas importantes na resolução de problemas teoricamente voltados à Combinatória, porém dentro do universo da Teoria dos Números. Muitos desses problemas estão relacionados à fatoração em primos, divisores comuns e conjuntos satisfazendo propriedades particulares. Também encontraremos problemas em que precisaremos construir ou exibir exemplos de conjuntos. Dentre as técnicas ou ideias mais comuns que utilizaremos para resolver esses problemas, estão a Indução Finita, Contagem Dupla, Princípio da Casa Dos Pombos, Fatoração em primos, Divisibilidade, Princípio Extremo. Também alguns problemas clássicos serão úteis para construir ideias mais complexas e resolver outros problemas.

Problema 01. Seja n um inteiro positivo. Dado o conjunto $A = \{1,2, \dots , 2n\}$, mostre que em todo subconjunto de A com pelo menos $n + 1$ elementos existem dois que são primos entre si.

Dica: Lembre-se que quaisquer dois inteiros consecutivos são primos entre si. Logo, é suficiente provarmos que escolhendo-se $n + 1$ elementos de A, sempre teremos pelo menos dois consecutivos.

Solução: Considere a seguinte partição do conjunto A em n conjuntos:

$$A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \cdots \cup \{2n - 1, 2n\},$$

de modo que os elementos do mesmo conjunto da partição sejam consecutivos e, portanto, primos entre si. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, qualquer subconjunto de A com pelo menos $n + 1$ conterá dois elementos num mesmo conjunto da partição, o que resolve o problema.

Problema 02. Seja n um inteiro positivo. Dado o conjunto $A = \{1,2, \dots , 2n\}$, mostre que em todo subconjunto de A com pelo menos $n + 1$ elementos existem dois, digamos x e y, tais que $x \mid y$ ou $y \mid x$.

Solução: Aqui utilizaremos um fato bastante conhecido e que poderá ser utilizado em outros problemas:

Todo número natural n pode ser escrito na forma $n = 2^k \cdot b$, com $k \geq 0$ e b ímpar.

O fato acima é justificável diretamente pela fatoração de n em primos. Escrevendo $n = 2^k \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot \dots$, podemos definir $b = 3^q \cdot 5^r \cdot \dots$, e está tudo resolvido.

Como usaremos este fato para resolver o nosso problema? Vamos pensar em b como a parte ímpar do natural n. Considerando um elemento qualquer $x \in A$, escreveremos $x = 2^k \cdot b$. Veja que $b \in \{1, 3, 5, \dots , 2n - 1\}$, ou seja, admite apenas n possibilidades. Dessa forma, escolhendo-se $n + 1$ elementos de A, dois deles terão a mesma parte ímpar, digamos $x = 2^k \cdot b$ e $y = 2^q \cdot b$. Se $k < q$, então $x \mid y$. Caso contrário, $y \mid x$.

Problema 03. Seja p um inteiro positivo. Prove que a quantidade de múltiplos de p no conjunto $\{1, 2, \dots , n\}$ é exatamente $\lfloor n/p \rfloor$.

Solução: Suponha que haja exatamente k múltiplos de p no conjunto $\{1, 2, \dots , n\}$, a dizer:

$$p, 2p, \dots , kp.$$

Então,

$$kp \leq n < (k + 1)p \therefore k \leq \frac{n}{p} < k + 1 \therefore k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

Problema 04. Seja S um conjunto com n inteiros. Mostre que podemos escolher alguns deles de modo que a sua soma seja múltiplo de n.

Solução: Seja $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Considere as n somas:

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Se alguma dessas somas for múltiplo de n, o problema está resolvido. Caso contrário, cada uma delas deixará resto 1, 2, ..., $n-1$ na divisão por n. Novamente, pelo Princípio da Casa dos Pombos, como há apenas $n-1$ restos possíveis, duas das n somas deixarão o mesmo resto na divisão por n, digamos s_i e s_j, com $i < j$. Dessa forma, $s_j - s_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$ é múltiplo de n.

Problema relacionado: Mostre que todo número natural possui um múltiplo formado apenas pelos dígitos 0 e 1.

Solução: Considere $n \in N$. Vamos mostrar que existe um múltiplo de n formado apenas pelos dígitos 0 e 1. Considere os n números:

$$1$$
$$11$$
$$111$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{111\dots111}_{n\ 1's}$$

Se um deles for múltiplo de n, o problema está resolvido. Caso contrário, dois deles deixarão o mesmo resto na divisão por n (pois cada um deles só poderá deixar $n-1$ restos possíveis na divisão por n). Fazendo-se a diferença entre estes dois números, obteremos um múltiplo de n, o qual será da forma $111 \dots 11000 \dots 00$.

Problema 05. Mostre que existem infinitos números primos.

Solução: Suponha, por absurdo, que o conjunto dos números primos seja finito, digamos:

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}.$$

Considere o número natural $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. Veja que N é maior que todos os números primos do conjunto P. Logo, N não pode ser primo, mas deverá ser divisível por algum primo p. Como todos os primos aparecem no conjunto P, teremos $p = p_j$, para algum j. Além disso, $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Portanto,

$$p \mid N \Rightarrow p \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1 \therefore p \mid 1,$$

o que é um absurdo. A conclusão é que o conjunto dos números primos não pode ser finito.

Problema 06. Mostre que, para todo inteiro positivo $n \geq 2$, existem n inteiros consecutivos

$$x + 1, x + 2, \dots, x + n$$

que são todos compostos.

Solução: Para esse tipo de problema, em que devemos mostrar a existência de um dado conjunto, é suficiente mostrarmos um exemplo que satisfaça o pedido. Neste caso, para cada $n \geq 2$, considere os números:

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1).$$

Veja que, para todo $2 \leq k \leq n + 1$, teremos $(n + 1)! + k$ múltiplo de k, portanto será composto.

Problema 07. Considere um conjunto infinito de números inteiros $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ satisfazendo à seguinte propriedade:

$$\textit{Para quaisquer dois elementos distintos } a_i \textit{ e } a_j, mdc(a_i, a_j) > 1.$$

a) Mostre que existe um número primo que divide infinitos elementos do conjunto.

b) Verifique se existe um primo p que divida todos os elementos do conjunto.

Solução: a) Para cada $j \geq 2$, seja p_j um fator primo de $mdc(a_1, a_j)$. Temos $p_j \mid a_1$ e $p_j \mid a_j$. Então, a sequência infinita

$$p_2, p_3, p_4, \dots$$

possui apenas uma quantidade finita de valores (caso contrário, p_1 teria infinitos divisores primos). Sejam $q_1, q_2, \dots, q_k$ todos os fatores primos de a_1.

Por outro lado, como a sequência é infinita, algum valor p deverá aparecer infinitas vezes, ou seja, haverá um primo p que divide infinitos termos da sequência.

b) Não é necessário que exista um primo p que divida todos os termos da sequência. Basta tomar o seguinte conjunto como contraexemplo:

$$\{6, 15, 10, 10^2, 10^3, \dots\}.$$

Os únicos divisores primos desses termos são 2, 3 e 5. Nenhum deles divide todos os números do conjunto.

Problema 08. Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, existe um conjunto S de n inteiros positivos tal que, para quaisquer dois elementos distintos a e b, a diferença $a - b$ é um divisor comum de a e b.

$$a - b \mid a \quad \text{e} \quad a - b \mid b$$

Solução: Usaremos indução sobre n.

• Para $n = 2$, tomemos o conjunto $\{1, 2\}$.

• Suponha que o conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ satisfaça ao enunciado. Iremos construir, a partir de A, um conjunto com $k + 1$ elementos que também satisfaça. Uma boa ideia é observarmos o que acontece com o conjunto A quando somamos uma constante a cada elemento, a dizer:

$$A' = \{a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_k + c\}.$$

Para que a propriedade continue valendo, cada diferença $(a_i + c) - (a_j + c) = a_i - a_j$ deve dividir $a_i + c$ e $a_j + c$. Mas, pela hipótese de indução, já sabemos que $a_i - a_j \mid a_i$ e $a_i - a_j \mid a_j$. Logo, $a_i - a_j$ deverá dividir c. Dessa forma, para que o conjunto A' satisfaça ao enunciado, é suficiente que c seja qualquer múltiplo comum de $a_1, a_2, \dots, a_n$. Para completarmos a indução, basta definirmos o conjunto com $(k + 1)$ elementos:

$$\{c, a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_k + c\},$$

Fazendo $c = mmc(a_1, a_2, \dots a_k)$. Perceba que a diferença entre quaisquer dois elementos desse conjunto dividirá ambos os elementos.

Problema 09. (OBM – 2016 / Nível 2) Seja $a_0 = a > 1$ um inteiro e, para $n \geq 0$, defina $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$. Mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência a_n é infinito.

Solução: Denote por p_i o menor fator primo de a_i. Perceba que p_i é ímpar, para todo $i \geq 1$. Além disso, a_i será relativamente primo com todos os inteiros positivos menores que p_i.

Vamos provar que $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$. Suponha que $p_{i+1} \leq p_i$, para algum i.

Temos:

$$p_{i+1} \mid a_{i+1} = 2^{a_i} - 1 \therefore 2^{a_i} \equiv 1 (mod\ p_{i+1}).$$

Além disso, $2^{p_{i+1}-1} \equiv 1 (mod\ p_{i+1})$. Usaremos o seguinte fato:

Se $mdc(a, n) = 1$ e r, s são inteiros tais que $a^r \equiv 1 (mod\ n)$ e $a^s \equiv 1 (mod\ n)$, então $a^{mdc(r,s)} \equiv 1 (mod\ n)$.

Com isso, podemos escrever $2^{mdc(a_i, p_{i+1}-1)} \equiv 1 (mod\ p_{i+1})$. Mas, como $p_{i+1} - 1 \leq p_i - 1 < p_i$ e p_i é o menor fator primo de a_i, então a_i é relativamente primo com todos os inteiros positivos menores que p_i. Em particular, teremos $mdc(a_i, p_{i+1} - 1) = 1$. Dessa forma, ficamos com $2^1 \equiv 1 (mod\ p_{i+1})$, o que é um absurdo.

Portanto, $p_i < p_{i+1}$, para todo i, o que significa que a sequência de valores $p_1 < p_2 < \cdots$ é infinita.

Problemas Propostos

01. Dado um inteiro positivo m, seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de inteiros positivos não excedendo m tais que, para quaisquer dois elementos x_i e x_j, com $i \neq j$, $mmc(x_i, x_j) \geq m + 1$.

a) Mostre que

$$\left\lfloor \frac{m}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{x_2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{x_n} \right\rfloor \leq m - 1.$$

b) Mostre que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < \frac{3}{2} \cdot$$

02. Determine se existe ou não uma sequência crescente de inteiros positivos $(a_1, a_2, \ldots)$ com a seguinte propriedade: para qualquer inteiro k, a sequência $(a_1 + k, a_2 + k, \ldots)$ contém apenas um número finito de números primos.

03. (USAMO – 1998) Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, existe um conjunto S de inteiros positivos tal que ab é divisível por $(a - b)^2$, para quaisquer dois elementos distintos $a, b \in S$.

04. (OBM – 2011 / Nível 3) Existem 2011 inteiros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2011}$ tais que, para todo $1 \leq i < j \leq 2011$, $mdc(a_i, a_j) = a_j - a_i$?

05. É dada uma lista de n inteiros positivos, não necessariamente distintos, cuja soma é menor que $2n$. Prove que, para qualquer inteiro m não excedendo a soma desses inteiros, podemos escolher alguns inteiros dessa lista cuja soma é igual a m.

06. Seja S um conjunto infinito de inteiros tal que, para todo subconjunto finito de S, o máximo divisor comum de seus elementos é maior que 1. Mostre que todos os elementos de S possuem um divisor comum maior que 1.

07. (BAMO – 2009) Um conjunto S de inteiros positivos é *mágico* se, para quaisquer dois elementos distintos $i, j \in S$, $(i + j)/mdc(i, j) \in S$. Ache todos os possíveis conjuntos mágicos.

08. (Treinamento Cone Sul – 2007) Seja $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ uma sequência crescente de inteiros positivos em que o número de fatores primos de cada termo, contando fatores repetidos, nunca é maior que 2007. Prove que é sempre possível extrair do conjunto A um subconjunto infinito

$$B = \{b_1 < b_2 < \cdots\}$$

tal que o máximo divisor comum entre b_i e b_j é sempre o mesmo, para quaisquer naturais $i \neq j$.

09. Os números 1, 2, 3, ..., 200 são divididos em 50 conjuntos. Mostre que pelo menos um desses 50 conjuntos contém três números distintos que podem ser medidas dos lados de um triângulo.

10. Ache todos os inteiros positivos n para os quais o conjunto

$$A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\}$$

possa ser particionado em 12 subconjuntos de modo que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma.

11. (Rioplatense 1999) Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primos distintos. Considere todos os inteiros positivos que utilizam apenas esses primos (não necessariamente todos) em sua fatoração em primos, formando assim uma sequência infinita

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots.$$

Demonstre que, para cada natural c, existe um natural n tal que

$$a_{n+1} - a_n > c.$$

12. (Reino Unido – 1999) Para cada inteiro positivo n, seja $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Para que valores de n é possível expressar S_n como a união de dois subconjuntos não vazios disjuntos tais que a soma dos elementos de cada subconjunto é a mesma?

b) Para quais valores de n é possível expressar S_n como a união de três subconjuntos não vazios disjuntos tais que a soma dos elementos de cada subconjunto é a mesma?

13. Existem 10 inteiros distintos tais que a soma de quaisquer 9 deles é um quadrado perfeito?

14. (Olimpíada Balcânica – 1992) Um conjunto S de números é chamado *livre de somas* se $x + y \neq z$, para quaisquer $x, y, z \in S$. Qual é o maior número de elementos que pode ter um subconjunto livre de somas de $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$?

15. (Bielorrússia – 2000) Seja $M = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$. Ache o menor inteiro positivo n para o qual é possível particionar M em n subconjuntos disjuntos tais que, sempre que a, b e c (não necessariamente distintos) pertencem ao mesmo subconjunto, então $a \neq b + c$.

16. Seja n um inteiro positivo. Existe uma permutação $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$ tal que não existem índices $i < k < j$ para os quais $a_k = (a_i + a_j)/2$?

17. (Cone Sul – 2010/6) Determine se existe uma sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$ de inteiros não negativos satisfazendo às seguintes condições:

i) Todos os inteiros não negativos aparecem na sequência exatamente uma vez;
ii) A sequência $b_n = a_n + n, n \geq 0$, é formada por todos os números primos e cada um deles aparece exatamente uma vez.

18. (Cone Sul – 2017/5) Sejam a, b e c inteiros positivos. Três sequências são definidas como segue:

· $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c;$
· $a_{n+1} = \lfloor a_n b_n \rfloor$, $b_{n+1} = \lfloor b_n c_n \rfloor$ e $c_{n+1} = \lfloor c_n a_n \rfloor$, para $n \geq 1$.

a) Prove que, para quaisquer a, b e c, existe um inteiro positivo N tal que $a_N = b_N = c_N$.
b) Ache o menor N tal que $a_N = b_N = c_N$, para alguma escolha de a, b e c tais que $a \geq 2$ e $b + c = 2a - 1$.

19. (Cone Sul – 2017/6) A sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \dots$ de inteiros positivos é definida como segue: $a_1 = 1$ e, para cada $n \geq 2$, a_n é o menor inteiro positivo distinto de $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ tal que

$$\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \cdots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}}$$

seja um inteiro. Prove que todos os inteiros positivos aparecem na sequência.

20. (Cone Sul – 2015/5) Determine se existe uma sequência infinita de inteiros positivos não necessariamente distintos $a_1, a_2, a_3, \dots$ tal que, para quaisquer inteiros m e n, com $1 \leq m < n$, o inteiro $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$ não é divisível por $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.