Problemas de Informação Incompleta

Rafael Kazuhiro Miyazaki - rafaelkmiyazaki@gmail.com

Bento Gonçalves, 24 de Janeiro de 2024

Problema 1. Uma lebre invisível se encontra em dos vértices de um grafo de N vértices e um grupo de caçadores tenta matar a lebre. Em cada movimento, todos atiram simultaneamente: cada caçador atira em um único vértice e eles escolhem os vértices cooperativamente. Se a lebre estiver em algum dos vértices alvo durante um movimento, a caça acaba. Caso contrário a lebre pode ficar no vértice que estava ou pular para um dos vértices adjacentes.
Os caçadores conhecem um algoritmo que permite que eles matem a lebre em no máximo $N!$ movimentos. Prove que existe um algoritmo que permite que matem a lebre em no máximo 2^N movimentos.

Problema 2. Na Vila Par, todas as moedas verdadeiras pesam uma quantidade par de gramas e todas as moedas falsas pesam uma quantidade ímpar de gramas.
Temos 2022 moedas entre as quais sabe-se que exatamente 2 são falsas.
Dispõe-se de uma balança eletrônica que informa unicamente se o peso total dos objetos colocados nela é par ou ímpar.
Determine o menor valore de k para o qual existe uma estratégia que permite identificar as duas moedas falsas usando a balança, no máximo, k vezes.

Problema 3. Sejam n e k números inteiros positivos com $k \leq n$. Em um grupo de n pessoas, cada uma ou sempre fala a verdade ou sempre mente. Arnaldo pode fazer perguntas para quaisquer dessas pessoas desde que essas perguntas sejam do tipo: "No conjunto A, qual a paridade de pessoas que falam a verdade?", onde A é um subconjunto de tamanho k do conjunto das n pessoas. A resposta só pode ser "par" ou "ímpar".

(a) Para quais valores de n e k é possível determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem?

(b) Qual o número mínimo de perguntas necessárias para determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem, quando esse número é finito?

Problema 4. Arnaldo e Bernaldo fazem a seguinte brincadeira: dado um conjunto finito de inteiros positivos A fixado, que os dois conhecem, Arnaldo escolhe um número a pertencente a A, mas não conta a ninguém qual número escolheu. Em seguida, Bernaldo pode escolher um inteiro positivo b qualquer (b pode pertencer a A ou não). Então Arnaldo fala apenas o número de divisores inteiros positivos do produto ab. Mostre que Bernaldo pode escolher b de modo que consiga descobrir o número a escolhido por Arnaldo.

Problema 5. Um grupo de 100 prisioneiros são informados que serão colocados em celas solitárias e serão interrogados um por um em uma sala contendo uma lâmpada com um interruptor que a liga e desliga. Os prisioneiros podem se comunicar com os outros apenas utilizando o interruptor e essa é a única forma de comunicação permitida. A luz se encontra inicialmente desligada. A ordem de interrogação não é informada aos prisioneiros mas é sabido que cada prisioneiro será interrogado um número infinito de vezes. Enquanto é interrogado, o prisioneiro pode escolher trocar o estado da lâmpada, deixa-la como a encontrou ou declarar que todos os prisioneiro já foram interrogados. Caso a declaração seja verdadeira, os prisioneiros serão libertados, caso contrário serão executados. Os prisioneiro podem elaborar uma estratégia que os libertará?

Problema 6. Um guarda propõe o seguinte jogo para seus prisioneiros. Todos os prisioneiros são levados para um pátio, onde cada um vestirá um chapéu de uma dentre 5 possíveis cores e formarão uma fila de maneira que cada um possa ver a cor do chapéu de todos exceto o próprio. O guarda então perguntará ao primeiro prisioneiro se ele sabe a cor de seu chapéu. Se ele responde "não", ele será executado publicamente. Caso contrário, ele será perguntado a cor de seu chapéu sem que os outros possam escutar sua resposta. Se ele estiver correto, ele será libertado. Caso contrário será executado publicamente. O guarda então segue para o próximo prisioneiro da fila e repete o processo, até que realize o processo com todos os prisioneiros. Os prisioneiro podem elaborar uma estratégia antes que o jogo comece, mas nenhuma comunicação entre eles é permitida após o início do jogo. Se a prisão tem 2015 prisioneiros, qual é o número máximo de prisioneiros que podem garantir sua liberdade utilizando uma estratégia ótima?

Problema 7. Uma máquina misteriosa contém uma combinação secreta de 2016 números inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$. É conhecido que todos os números da combinação com exceção de um. É possível realizar perguntas para a máquina da seguinte maneira: uma sequência de 2016 inteiros $y_1, \ldots, y_{2016}$ é fornecida e a máquina retorna o valor da soma

$$x_1y_1 + \cdots + x_{2016}y_{2016}.$$

Após responder a primeira pergunta, a máquina aceita uma segunda pergunta, e então uma terceira e assim sucessivamente.
Determine quantas questões são necessárias para determinar a combinação:

(a) sabendo que o número que é diferente dos outros é igual a 0.

(b) sem saber qual o valor do número diferente dos outros.

Problema 8. (a) Em uma sala temos $2n+1 > 5$ baterias. Não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, mas sabemos que o número de baterias carregadas é $n+1$. Uma lantera utiliza duas baterias, e funciona somente se ambas as baterias estão carregadas. Qual é o menor número de testes suficientes para que a lanterna funcione?

(b) Em uma sala temos $2n > 4$ baterias. Não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, mas sabemos que o número de baterias carregadas é n. Uma lantera utiliza duas baterias, e funciona somente se ambas as baterias estão carregadas. Qual é o menor número de testes suficientes para que a lanterna funcione?

Problema 9. Alice tem um mapa do País das Maravilhas, que consiste de $n \geq 2$ cidades. Para cada par de cidades, existe uma estrada estreita que liga as duas cidades. Um dia, todas as estradas são declaradas de mão única. Alice não tem nenhuma informação sobre a direção das estradas, mas o Rei de Copas ofereceu sua ajuda a ela. Ela pode fazer a ele um número de perguntas. Para cada pergunta ela pode escolher um par de cidades e o Rei de Copas diz a ela a direção da estrada entre essas cidades. Alice quer saber se existe alguma cidade no País das Maravilhas com no máximo uma estrada saindo dela. Prove que é sempre possível descobrir se isso ocorre com no máximo $4n$ perguntas.

Problema 10. Seja G um grafo simples, conexo e finito. Um caçador e um coelho invisível jogam no grafo G. O coelho está inicialmente em um vértice w_0. Na k-ésima jogada (para $k \geq 0$), o caçador escolhe livremente um vértice v_k. Se $v_k = w_k$, o coelho é capturado e o jogo termina. Caso contrário, o coelho se move invisivelmente

por uma aresta de w_k até w_{k+1} (w_k e w_{k+1} são adjacentes e, portanto, distintos) e o jogo continua. O caçador conhece estas regras e conhece o grafo G. Depois da k-ésima jogada, ele sabe se $w_k \neq v_k$, mas não recebe nenhuma outra informação.
Caracterize os grafos G para os quais o caçador tem uma estratégia que garanta que ele capture o coelho em no máximo N jogadas para algum inteiro positivo N. Aqui N deve depender apenas de G e a estratégia deve funcionar independentemente da posição inicial e da trajetória do coelho.
Nota: Um grafo é simples se suas arestas não são direcionadas, toda aresta liga dois vértices distintos e entre dois vértices há no máximo uma aresta. Um grafo simples é finito se tem um número finito de vértices. Um grafo simples é conexo se entre quaisquer dois vértices há um caminho (formado por arestas) ligando os dois vértices.

Problema 11. Um coelho invisível e um caçador jogam da seguinte forma no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do coelho e o ponto de partida B_0 do caçador são iguais. Depois de $n-1$ rodadas do jogo, o coelho encontra-se no ponto A_{n-1} e o caçador encontra-se no ponto B_{n-1}. Na n-ésima rodada do jogo, ocorrem três coisas na seguinte ordem:

(i) O coelho move-se de forma invisível para um ponto A_n tal que a distância entre $A_n - 1$ e A_n é exatamente 1.

(ii) Um aparelho de localização informa um ponto P_n ao caçador. A única informação garantida pelo aparelho ao caçador é que a distância entre P_n e A_n é menor ou igual a 1.

(iii) O caçador move-se de forma visível para um ponto B_n tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é exatamente 1.

É sempre possível que, qualquer que seja a maneira em que se mova o coelho e quaisquer que sejam os pontos informados pelo aparelho de localização, o caçador possa escolher os seus movimentos de modo que depois de 10^9 rodadas o caçador possa garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual que 100?

Problema 12. O desafio do mentiroso é um jogo para dois jogadores A e B. As regras do jogo dependem de dois inteiros positivos k e n conhecidos por ambos os jogadores.
No início do jogo, o jogador A escolhe inteiros x e N com $1 \leq x \leq N$. O jogador A mantém x em segredo, e diz a B o verdadeiro valor de N. Em seguida, o jogador B tenta obter informação acerca de x fazendo perguntas a A da seguinte maneira: em cada pergunta, B especifica um conjunto arbitrário S de inteiros positivos (que pode ser um dos especificados nalguma pergunta anterior), e pergunta a A se x pertence a S. O jogador B pode fazer tantas perguntas desse tipo como deseje. Depois de cada pergunta, o jogador A deve responder imediatamente com sim ou não, mas pode mentir tantas vezes como queira. A única restrição é que dadas quaisquer $k+1$ respostas consecutivas, pelo menos uma deve ser verdadeira.
Quando B tenha feito tantas perguntas como pretenda, deve especificar um conjunto X com no máximo n inteiros positivos. Se x pertencer a X então ganha B; caso contrário, B perde. Prove que:

1. Se $n \leq 2k$, então B pode garantir a sua vitória.
2. Para todo k suficientemente grande, existe um inteiro $n \geq 1,99^k$ tal que B não pode garantir a sua vitória.

Problema 13. Seja $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ uma sequência finita de números reais com a seguinte propriedade: para cada par de elementos (x_i, x_j), , com exceção do par $(0,1)$, existe um outro par (x_k, x_ℓ) (distinto, mas não necessariamente disjunto do primeiro par) tal que $x_k - x_\ell = x_i - x_j$. Prove que todos os termos da sequência são racionais.

Problema 14. Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes inteiros tais que, para todos numeros reais s e t, se $P(s)$ e $P(t)$ sao inteiros então $P(st)$ é também um inteiro.