Teoria Extremal dos Conjuntos

Semana Olímpica 2024 - Bento Gonçalves - RS

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

1 Teorema de Sperner

Definição 1.1. Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ uma família de conjuntos. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *anticadeia* se não existem $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$, tais que $A \subseteq B$.

Teorema 1.2. (Sperner, 1928) Se $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ é uma anticadeia, então

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Lema 1.3. (Desigualdade LYMB) Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ uma anticadeia. Então

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

1.1 Problemas

Problema 1.1 (Littlewood-Offerd problem) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais com $|a_i| \geq 1$. Considere as 2^n combinações lineares $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$ com $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$. Determine o número máximo de somas que pertencem a um mesmo intervalo da forma $(x-1, x+1)$.

Problema 1.2 (IMO Shortlist 1988) 49 estudantes resolvem um conjunto de 3 problemas. Cada estudante pontua em cada problema uma nota inteira de 0 a 7. Prove que existem dois estudantes A e B tais que, para cada problema, A pontua pelo menos a mesma nota que B.

Problema 1.3 (CIIM 2019) Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de reais não nulos. Para $m \geq 1$, defina:

$$X_m = \left\{ X \subseteq \{0, 1, \ldots, m-1\} : \left| \sum_{x \in X} a_x \right| > \frac{1}{m} \right\}.$$

Mostre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|X_n|}{2^n} = 1.$$

2 Teorema de Erdös-Ko-Rado

Definição 2.1. Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ é intersectante se $A \cap B \neq \emptyset$ para todos $A, B \in \mathcal{A}$.

Teorema 2.2. (Erdös-Ko-Rado, 1938) Se $n \geq 2k$ e $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é intersectante, então

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

3 Teorema de Dilworth

Definição 3.1. Uma *relação de ordem* $\succ$ é qualquer relação que satisfaz as seguintes propriedades:

- $A \succ A$ (reflexiva)
- $A \succ B$ e $B \succ C \Rightarrow A \succ C$ (transitiva)
- $A \succ B$ e $B \succ A \Rightarrow A = B$ (antissimétrica)

Temos mais alguns conceitos:

- Se $a \succ b$ ou $b \succ a$, dizemos que a e b são *comparáveis*;
- Uma *cadeia* é uma sequência $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_k$;
- Uma *anticadeia* é um conjunto de elementos tais que quaisquer dois elementos não são comparáveis;
- Dizemos que a é *maximal* quando não existe $b \neq a$ tal que $b \succ a$;
- Um conjunto é *parcialmente ordenado* se ele possui uma relação de ordem;
- Um conjunto é *totalmente ordenado* se quaisquer dois elementos são comparáveis.

Teorema 3.2. (Dilworth, 1950) Em todo conjunto parcialmente ordenado, a quantidade máxima de elementos em uma anticadeia é igual à quantidade mínima de cadeias disjuntas que cobrem o conjunto.

Teorema 3.3. (Mirsky, 1971) Em todo conjunto parcialmente ordenado, a quantidade máxima de elementos em uma cadeia é igual à quantidade mínima de anticadeias disjuntas que cobrem o conjunto.

3.1 Problemas

Problema 3.1 (Romênia TST 2005) Seja n um inteiro positivo e S um conjunto de n^2+1 inteiros positivos com a propriedade de que qualquer subconjunto de S com $n+1$ elementos contém dois números tais que um divide o outro. Mostre que S contém $n+1$ números distintos $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ tais que $a_i \mid a_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots n$.

Problema 3.2 (Erdös-Szekeres) Mostre em qualquer sequência de $ab+1$ números reais, existem uma sequência não decrescente com $a+1$ termos ou uma sequência não crescente com $b+1$ termos.

Problema 3.3 (IMO 2020) Seja $n > 1$ um inteiro. Na encosta de uma montanha existem n^2 estações, todas com diferentes altitudes. Duas companhias de teleféricos, A e B, operam k teleféricos cada uma. Cada teleférico faz a viagem de uma estação para uma de maior altitude (sem paragens intermédias). Os k teleféricos de A partem de k estações diferentes e terminam em k estações diferentes; além disso, se um teleférico parte de uma estação de maior altitude do que a de partida de outro, também termina numa estação de maior altitude do que a de chegada desse outro. A companhia B satisfaz as mesmas condições. Dizemos que duas estações estão ligadas por uma companhia se podemos começar na estação com menor altitude e chegar à de maior altitude usando um ou mais teleféricos dessa companhia (não são permitidos quaisquer outros movimentos entre estações). Determine o menor inteiro positivo k que garante que existam duas estações ligadas por ambas as companhias.

Problema 3.4 (IMO 2023) Seja n um inteiro positivo. Um triângulo japonês consiste em $1+2+\ldots+n$ círculos iguais formando um triângulo equilátero tal que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, a i-ésima linha contém exatamente i círculos, com exatamente um deles pintado de vermelho. Um caminho ninja num triângulo japonês é uma sequência de n círculos começando com o círculo da primeira linha e indo sucessivamente de um círculo para um dos dois círculos imediatamente abaixo dele e terminando na última linha. Em função de n, encontre o maior k tal que em qualquer triângulo japonês existe um caminho ninja contendo pelo menos k círculos vermelhos.

Problema 3.5 (Eslováquia) Dados 1001 retângulos com ambas as dimensões pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, prove que podemos escolher três deles distintos, A, B, C, tais que A cabe em B e B cabe em C.

Problema 3.6 (Romênia) Sejam m e n inteiros positivos e S um subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 2^m n\}$ com $(2^m - 1)n + 1$ elementos. Demonstre que S contém $m+1$ números distintos $a_0, a_1, \dots, a_m$ tais que $a_{k-1} \mid a_k$ para $k = 1, 2, \dots, m$.

4 Teorema de Hall

Definição 4.1. Um *emparelhamento* M em um grafo G e um conjunto de arestas de G disjuntas par a par. Dizemos que M *satura* um conjunto $X \subseteq V(G)$ se cada vértice de X é incidente a uma aresta de M. Um emparelhamento em G é dito *perfeito* se satura $V(G)$.

Teorema 4.2. (Hall, 1935) Seja G um grafo bipartido cm bipartição (X, Y). O grafo G contém um emparelhamento que satura X se, e somente se,

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

para todo $S \subseteq X$.

4.1 Problemas

Problema 4.1 Mostre que todo grafo bipartido k-regular possui um emparelhamento.

Problema 4.2 Suponha que um baralho de cartas usual com 52 cartas está dividido em 13 pilhas com 4 cartas, cada. Mostre que é possível selecionar uma carta de cada pilha de modo que cada carta possua um símbolo diferente entre $A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K$.

Problema 4.3 Seja $S = \{1, 2, \ldots, kn\}$ e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ partições de S em n conjuntos de tamanho k. Mostre que existe um conjunto T de tamanho n tal que qualquer interseção $T \cap A_i$ e $T \cap B_i$ possui cardinalidade 1.

Problema 4.4 (Petersen, 1981) Um 2-fator de um grafo G é um subgrafo 2-regular contendo todos os vértices de G. Para todo inteiro positivo k, mostre que todo grafo $2k$-regular pode ser particionado em k 2-fatores aresta-disjuntos.

Problema 4.5 (Bollobás) Um grafo bipartido G possui partes X e Y. Seja A o conjunto dos vértices de G com grau máximo. Mostre que existe um emparelhamento que satura $A \cap X$.

Problema 4.6 (Canada 2006) Em um tabuleiro $m \times n$, estão escritos alguns números reais. Sabe-se que em cada linha e em cada coluna há pelo menos um número positivo. Ademais, se uma linha e uma coluna se intersectam em um elemento positivo, então a soma de seus elementos é a mesma. Prove que $m = n$.

Problema 4.7 (Cazaquistão 2003) Dois papeis quadrados possuem área igual a 2003. Cada um dos papéis é dividido arbitrariamente em 2003 polígonos que não se sobrepõem, cada polígono tendo área 1. Em seguida, coloca-se os dois papeis um em cima do outro. Prove que podemos furar os papéis com 2003 alfinetes de modo que cada um dos 4006 polígonos foi perfurado exatamente uma vez.

Problema 4.8 (Putnam 2012) Suponha que $2m$ times participam de um torneio de polícia e ladrão. Durante um período de $2m-1$ dias, todo time joga com cada um dos outros exatamente uma vez. Não há empates. Mostre que para cada dia, podemos selecionar um time vencedor sem que escolhamos o mesmo time duas vezes.

Problema 4.9 (Baltic Way 2013) Papai Noel possui n presentes para distribuir para n crianças. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a i-ésima criança quer receber $x_i > 0$ presentes. Suponha que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Prove que o Papai Noel pode dar a cada criança a quantidade de presentes que cada uma deseja.

Problema 4.10 (IMO Shortlist 2006) Um triângulo esburacado é um triângulo equilátero virado para cima de lado n, dividido em n^2 triângulos equiláteros unitários, com n triângulos equiláteros unitários virados para cima cortados. Um diamante é um losango com lado unitário e ângulos internos 60 e 120. Prove que um triângulo equilátero esburacado T pode ser coberto por diamantes (sem sobreposições) se, e somente se, todo triângulo equilátero de lado k virado para cima e contido em T tem no máximo k buracos, $1 \leq k \leq n$.

Problema 4.11 (IMO Shortlist 2012) As colunas e as linhas de um tabuleiro $3n \times 3n$ são numeradas com $1, 2, \ldots, 3n$. Toda casa (x, y) com $1 \leq x, y \leq 3n$ é pintada de azul, branco ou caramelo a depender se o resto de $x + y$ na divisão por 3 é $0, 1$ ou 2 respectivamente. Uma moeda colorida de azul, branco ou caramelo é colocada em cada quadrado, sendo $3n^2$ moedas de cada cor. Suponha que podemos permutar as moedas de modo que cada moeda é movida para uma distância menor ou igual a d de sua posição original, de modo que cada moeda azul e colocada no lugar de uma moeda branca, cada moeda branca é colocada no lugar de uma moeda caramelo e cada moeda caramelo é coocada no lugar de uma moeda azul. Prove que é possível permutar as moedas de modo que cada moeda é movida para uma distância menor ou igual a $d + 2$ de sua posição original, de modo que cada moeda é colocada em uma casa com a mesma cor.

Problema 4.12 (China TST 2022) Seja m um inteiro positivo, e $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos (não necessariamente distintos) de um conjunto finito A. Sabe-se que para qualquer subconjunto não vazio I de $\{1, 2 \ldots, m\}$, temos

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I| + 1.$$

Mostre que os elementos de A podem ser coloridos de preto e branco de modo que cada um dos subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ contém elementos de ambas as cores.