Coordenadas Baricêntricas e o P2 da IGO

Gabriel Torkomian

22 de janeiro de 2024

Fazer geometria é um caminho sem volta... e parece que ninguém escolheu esse caminho.

A ideia de abordar esse tema aqui nasceu depois de ver o desempenho do Brasil na IGO de 2023. Ter a triade de contas: coordenadas baricentricas, complexos e trigonometria é de muita importância e pode te salvar de muitos problemas complicados quando atacados apenas com geometria sintética. A união das ideias sintéticas com as contas é maravilhoso.

1 Definições Básicas

Definição 1. *No plano cartesiano, dados 3 pontos não colineares, A, B, C, existe uma única forma de escrever um ponto P qualquer do plano, onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e*

$$\overrightarrow{P} = x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B} + z\overrightarrow{C} \qquad x + y + z = 1$$

Denotaremos $P = (x, y, z)$ as coordenadas de P.

Nesse sentido, é fácil provar que, se considerarmos áreas direcionadas,

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[ABC]}, \frac{[PAB]}{[ABC]}\right)$$

Para além disso, vamos definir as coordenadas não padronizadas do ponto P. Diremos que

$$P = (x : y : z) = (\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z})$$

onde, a soma das coordenadas do lado direito é 1, ou seja, é a coordenada baricêntrica padrão.

Obs. Note que se $P = (x, y, z)$ é a coordenada padrão, então $P = (xk : yk : zk)$ para $k \neq 0$ são todas as formas de representar P de forma não padronizada.

Definição 2. *Para dois pontos $P = (P_1, P_2, P_3)$ e $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ normalizados, definimos o vetor deslocamento*

$$\overrightarrow{PQ} = (Q_1 - P_1, Q_2 - P_2, Q_3 - P_3)$$

2 Fórmulas Gerais

Lema 1. *Sejam P_1, P_2, P_3 pontos no plano. Então,*

$$[P_1P_2P_3] = [ABC]\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

onde $P_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Lema 2. *A equação da reta é dada por*

$$ux + vy + wz = 0$$

onde $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Obs. Dando a aula na SO, me perguntaram: "Então toda reta passa pela origem?". De fato, $(0,0,0)$ satisfaz a equação da reta para quaiqueres u, v, w. Mas observe que : $(0,0,0)$ não representa nenhum ponto do plano!

Lema 3. *Dadas três retas* $u_ix + v_iy + w_iz = 0, \quad i = 1,2,3$, *então elas são todas concorrentes - podendo ser no ponto do infinito - se, e somente se,*

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Lema 4. *Dado* $P = (x : y : z)$ *um ponto qualquer, então o seu conjugado isogonal é dado por*

$$P = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$$

Lema 5. *Sejam* P_1, P_2, P_3 *pontos no plano. Então,*

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

se, e somente se, P_1, P_2, P_3 *colineares, onde* $P_i = (x_i : y_i : z_i)$.

Lema 6. *A equação geral de um círculo é dada por*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0 \tag{1}$$

onde $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Para além disso, se $P = (x', y', z')$ *- note que as coordenadas estão padronizadas aqui!! -*

$$Pot_\omega P = -a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y' + (x' + y' + z')(ux' + vy' + wz')$$

Disso, concluímos duas coisas bem interessantes. Se ω tem equação (1), então

$$u = Pot_\omega A, \qquad v = Pot_\omega B, \qquad w = Pot_\omega C$$

E, se Γ e Ω tem equações

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(u_1x + v_1y + w_1z) = 0$$

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(u_2x + v_2y + w_2z) = 0$$

Então, o eixo radical das circunferências é dado pela reta

$$(u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = 0$$

Lema 7. *Sejam P, Q pontos quaisqueres tais que $\overrightarrow{PQ} = (x_1, y_1, z_1)$. Então,*

$$|PQ|^2 = -a^2 y_1 z_1 - b^2 z_1 x_1 - c^2 x_1 y_1$$

E, se $\overrightarrow{RS} = (x_2, y_2, z_2)$, então $PQ \perp RS$ se, e somente se,

$$a^2(z_1 y_2 + z_2 y_1) + b^2(x_1 z_2 + x_2 z_1) + c^2(y_1 x_2 + y_2 x_1) = 0$$

Lema 8. *Aqui, vamos deixar as coordenadas de alguns pontos notáveis. Recomendo fortemente que todos se utilizem do ferramentário acima para concluir que essas, de fato, são as coordenadas dos pontos listados.*

$$O = (sen2A : sen2B : sen2C) = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

$$G = (1 : 1 : 1)$$

$$I = (a : b : c) \quad I_A = (-a : b : c) \quad I_B = (a : -b : c) \quad I_C = (a : b : -c)$$

$$K = (a^2 : b^2 : c^2)$$

$$H = (tgA : tgB : tgC) = ((c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) : (b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) : (a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2))$$

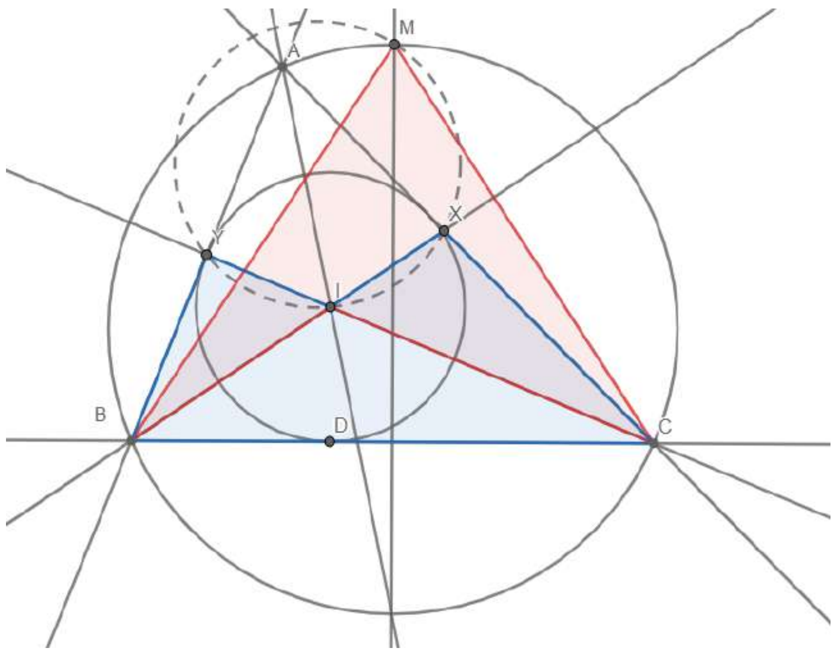
$$M = (a^2 : b(c-b) : c(b-c)) \qquad \text{ponto médio do arco } BAC.$$

Obs. Para calcular M, podemos caracterizar ele de várias formas. A mais conveniente para nós, será notar que AM é bissetriz externa e calcular as coordenadas de $P = AM \cap BC$ e definir M como o ponto tal que $M \in \odot ABC$ e A, P, M colineares.

3 Exemplos Resolvidos

Exemplo 1. ***(P2 - IGO2 2023)****Seja ABC um triângulo com incentro I. As retas BI, CI intersectam os lados AC, AB em X, Y respectivamente. Seja M o ponto médio do arco BAC do circuncírculo de ABC. Suponha que o quadrilátero $MXIY$ é cíclico. Prove que a área do quadrilátero $MBIC$ é igual a áreo do pentágono $BCXIY$.*

Solução. (João Vitor Ferreira)



Vamos lá, tome $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Sabemos que $I = (a : b : c)$, e pelo Teorema da Bissetriz Interna, $X = (a : 0 : c)$, $Y = (a : b : 0)$.

Consideremos a circuncírculo ω do triângulo XIY. Sabemos que a equação geral da circunferência é:

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0$$

E, como $X, Y, I \in \omega$, conseguimos que

$$-b^2ca + (a + c)(au + cw) = 0 \tag{2}$$

$$-c^2ab + (a + b)(au + bv) = 0 \tag{3}$$

$$-a^2bc - b^2ca - c^2ba + (a + b + c)(au + bv + cw) = 0 \tag{4}$$

Com uns 15 min de continhas, concluimos que

$$u = \frac{bc(b^2 + c^2 - bc - a^2)}{(a + b)(a + c)}$$

E, simetricamente em b, c (note que basta calcular um, e o outro sai por simetria):

$$v = \frac{ac(a + c - b)}{a + c} \qquad w = \frac{ab(a + b - c)}{a + b}$$

Também, pelo o que já vimos, sabemos que:

$$M = (a^2 : b(c-b) : c(b-c))$$

Como $M \in \odot XYI$, temos que

$$a^2b(c-b)^2c - b^2c(b-c)a^2 - c^2a^2b(b-c) + (a^2+2bc-b^2-c^2)\left(\frac{bc(b^2+c^2-bc-a^2)}{(a+b)(a+c)}a^2 + \frac{ac(a+c-b)}{a+c}b(c-b) + \frac{ab(a+b-c)}{a+b}c(b-c)\right) = 0$$

Com 10 minutinhos de contas, vemos que isso eqivale a:

$$(a^2-(b-c)^2)(a^3 - a(2b^2+2c^2-3bc) + (c-b)^2(b+c)) = 0$$

E, como $(a+b-c)(a+c-b) \neq 0$ pela desiguadade triângular, temos que

$$a^3 - a(2b^2+2c^2-3bc) + (c-b)^2(b+c)) = 0 \tag{5}$$

E, $[MBIC] = [BCXIY] \iff [MBC] = [BYC] + [BXC]$. E, essa segunda equivale a soma das coordenadas padronizadas 'X' de X com Y dar a de M.

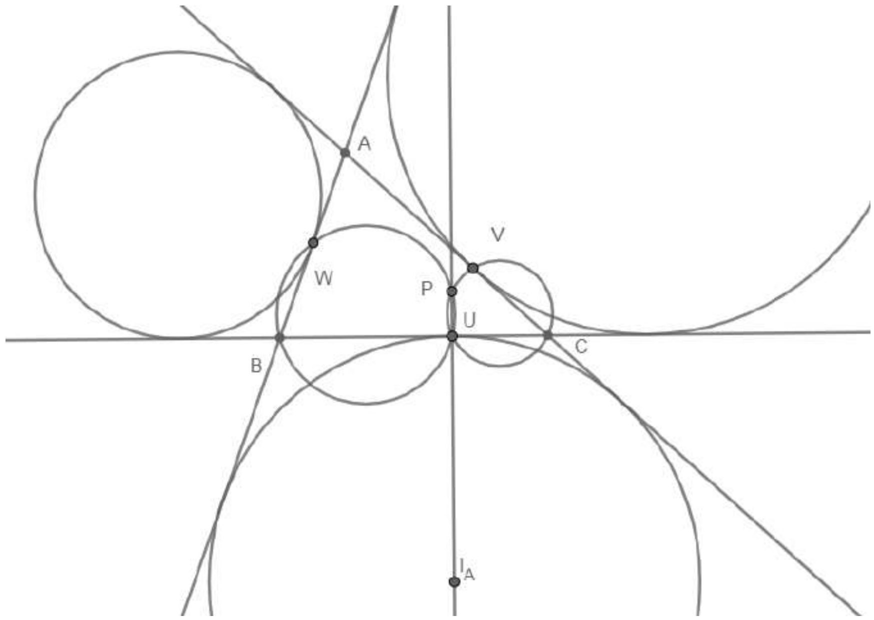
Ou seja,

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2} = \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}$$

que, com pouca manipulação (3 minutinhos aqui) vemos que essa equação é análoga a (4), e concluímos.

Exemplo 2. ***(P4 - OBM 2021)*** *Seja ABC um triângulo. Os círculos ex-inscritos (que tangenciam um lado e os prolongamentos de outros dois lados) tocam os lados BC, CA e AB nos pontos U, V e W, respectivamente. Sejam ru a reta que passa por U e é perpendicular a BC, r_v a reta que passa por V e é perpendicular a CA e r_w a reta que passa por W e é perpendicular a AB. Prove que as retas r_u, r_v e r_w passam por um mesmo ponto.*

Solução. (Por mim)



Considere $\odot BWU$ e $\odot CVU$, com as respectivas equações (lembrando que $u = Pot_\omega A$ e análogos)

$$(\odot BWU) : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x+y+z)((p-b)cx + (p-b)az) = 0 \tag{6}$$

$$(\odot CVU) : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x+y+z)((p-c)bx + (p-c)ay) = 0 \tag{7}$$

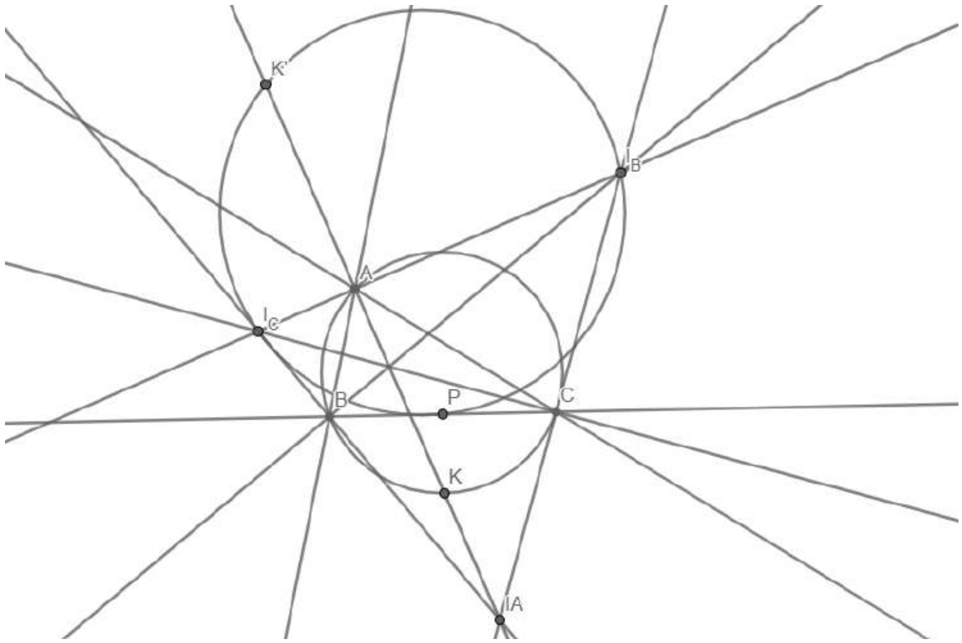
De (5) e (6), concluímos que o eixa radical de $\odot BWU$ e $\odot CVU$ tem equação:

$$(p-b)cx + (p-b)ac = (p-c)bx + (p-c)ay$$

Sendo $I_A = (-a : b : c)$ o ex-incentro em relação ao vértice A. Com a última equação e 3 minutinhos, verificamos que I_A está no eixo radical. Assim, r_u é o eixo radical. Pelo Teorema de Miquel para triângulos, sabemos que $\odot BWU$, $\odot CVU$ e $\odot AWV$ concorrem no centro radical dessas circunferências, e concluimos.

Exemplo 3. ***(OBM 2022 - P2)*** *Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB < AC$. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente. Seja K' a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, K', I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.*

Solução.



Tomemos inicialmente $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Sabemos que $P = (0 : 1 : 1)$, $I_B = (a : -b : c)$ e $I_C = (a : b : -c)$.

Como K está na bissetriz com relação a A, então $K = (t : b : c)$ e, como K está na circuncirculo do $\triangle ABC$, temos que

$$-a^2bc - b^2tc - c^2tb = 0$$

e concluimos que $K = (-a^2 : b(b+c) : c(b+c))$. Temos que $\overrightarrow{K} + \overrightarrow{K'} = 2\overrightarrow{A}$. Disso, e lembrando que devemos usar as coordenadas padronizadas

$$\begin{aligned} K' &= (2, 0, 0) - \left(\frac{-a^2}{(b+c)^2 - a^2}, \frac{b(b+c)}{(b+c)^2 - a^2}, \frac{c(b+c)}{(b+c)^2 - a^2}\right) \\ &= (2(b+c)^2 - a^2 : -b(b+c) : -c(b+c)) \end{aligned}$$

Agora, vamos achar a equação da circunferência $\odot PI_AI_B$. Colocando os pontos na equação geral da circunferência, teremos que:

$$-a^2 + 2(v + w) = 0$$

$$a^2bc - b^2ca + c^2ab + (ua - vb + wc)(a - b + c) = 0$$

$$a^2bc + b^2ca - c^2ab + (ua + vb - wc)(a + b - c) = 0$$

Daí, com uns 10 minutinhos de conta, concluímos que:

$$\odot PI_BI_C : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + \left(-bcx + \frac{a^2c}{2(b+c)}y + \frac{a^2b}{2(b+c)}z\right)(x + y + z) = 0.$$

E, com mais uns 15 minutos, concluímos que $Q \in \odot PI_BI_C$. De fato,

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy = -a^2bc(b+c)^2+b^2c(b+c)(2(b+c)^2-a^2)+bc^2(b+c)(2(b+c)^2-a^2) = 2bc(b+c)^2((b+c)^2-a^2)$$

$$-bcx + \frac{a^2c}{2(b+c)}y + \frac{a^2b}{2(b+c)}z = (-2bc(b+c)^2+a^2bc) - \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2bc}{2} = -2bc(b+c)^2$$

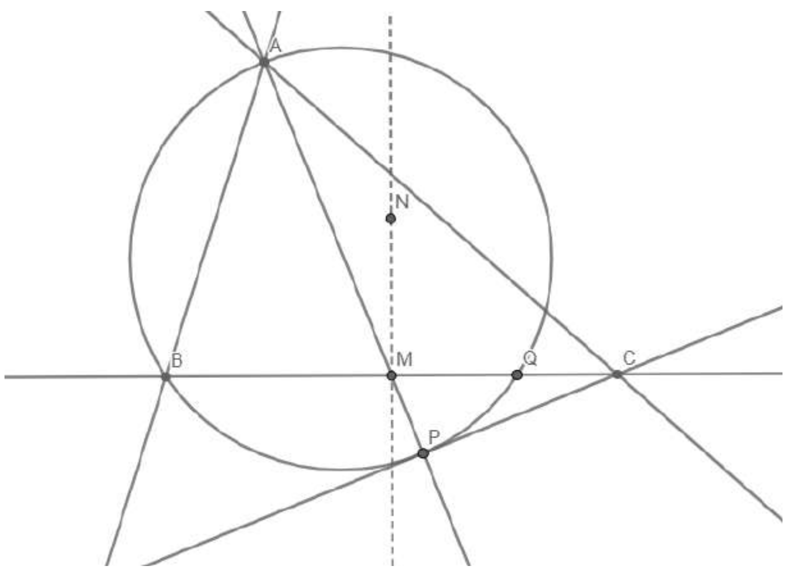
$$x+y+z = (2(b+c)^2-a^2) - b(b+c) - c(b+c) = (b+c)^2-a^2$$

4 Garantindo 2 Problemas na USAMO só Sabendo Geometria Sem Saber Geometria

Mesmo que sendo um pouco forçado e não muito ideal fazer este P1 por baricêntricas, decidi colocá-lo para mostrar 1) como lidar com perpendiculares e distâncias e que, isso normalmente não é muito legal e 2) o problema sai só com conta.

Exemplo 4. ***(USAMO 2023 - P1)*** *Seja ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. Considere P o pé da perpendicular de C em relação a AM. Suponha que o circuncírculo do triângulo ABP intersecte BC em $Q \neq B$. Seja N o ponto médio de AQ. Prove que $NB = NC$.*

Solução. "barybashed because coordbashing kills dophins"



Inicialmente, temos que $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $M = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P = (x:1:1)$. Logo, $\overrightarrow{CP} = \left(\frac{x}{x+2}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+2} - 1\right)$ e $\overrightarrow{AM} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Como $\overleftrightarrow{CP} \perp \overleftrightarrow{AM}$, segue que

$$a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-1\right)\right) + b^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x+2} - \left(\frac{1}{x+2}-1\right)\right) + c^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x+2}\right) = 0$$

Com uns 10 minutos, segue que

$$x = \frac{2b^2-2c^2}{a^2-3b^2-c^2} \implies P = \left(\frac{b^2-c^2}{a^2-2b^2-2c^2}, \frac{a^2-3b^2-c^2}{2a^2-4b^2-4c^2}, \frac{a^2-3b^2-c^2}{2a^2-4b^2-4c^2}\right).$$

Usando as coordenadas padronizadas, temos que a equação da circunferência $\odot ABP$ é

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + ux + vy + wz = 0$$

com $u = v = 0$ pois $A, B \in \odot ABP$. Finalmente, como $P \in \odot ABP$,

$$-a^2\left(\frac{a^2-3b^2-c^2}{2a^2-4b^2-4c^2}\right)^2 - b^2\cdot\frac{a^2-3b^2-c^2}{2a^2-4b^2-4c^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-2b^2-2c^2} - c^2\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-2b^2-2c^2}\cdot\frac{a^2-3b^2-c^2}{2a^2-4b^2-4c^2} + w\cdot\frac{a^2-3b^2-c^2}{2a^2-4b^2-4c^2} = 0$$

com mais 10 minutinhos, concluímos que

$$w = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Como $Q \in BC$, $Q = (0, t, 1-t)$. Colocando na equação da circunferência de $\odot ABP$, temos que

$$t = \frac{w}{a^2} \implies Q = \left(0, \frac{w}{a^2}, 1 - \frac{w}{a^2}\right) \implies N = \left(\frac{1}{2}, \frac{w}{2a^2}, \frac{1}{2} - \frac{w}{2a^2}\right)$$

Basta provar que $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Para isso, lembre que $M = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Assim, $\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}, \frac{w}{2a^2} - \frac{1}{2}, \frac{-w}{2a^2})$. Dado que $\overrightarrow{CB} = (0, 1, -1)$, basta provar que

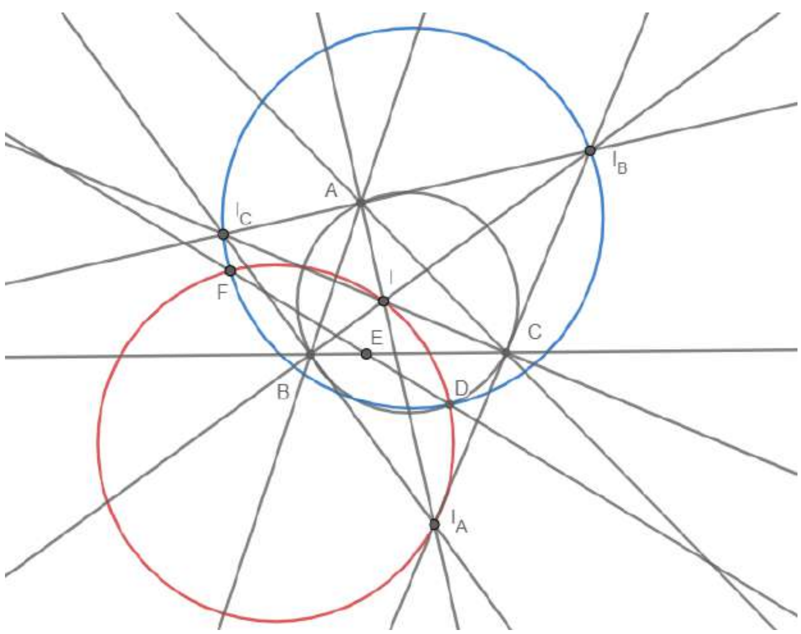
$$a^2\left(\frac{w}{2a^2} - \frac{1}{2} + \frac{w}{2a^2}\right) + b^2\left(\frac{1}{2}\right) + c^2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \implies w = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Com mais 1 minutiho, vemos que isso equvivale a $w = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$ e concluímos.

Agora, neste outro, coordenadas baricêntricas faz mágicas.

Exemplo 5. ***(USAMO 2023 - P6)*** *Seja ABC um triângulo com incentro I e ex-incentros I_A, I_B e I_C. Considere D um ponto arbitrário em $\odot ABC$ que não está nas retas BC, II_A e I_BI_C. Suponha que os circuncírculos $\odot DII_A$ e $\odot DI_BI_C$ concorrem em dois pontos distintos D e F. Se $E = DF \cap BC$, prove que $\angle BAD = \angle EAC$.*

Solução.



Tomemos inicialmente $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Sabemos que $I_A = (-a : b : c)$,

$I_B = (a : -b : c)$, $I_C = (a : b : -c)$ e $D = (x : y : z)$, no qual

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

Seja E' o ponto em BC tal que AD e AE' são isogonais. Sabemos que $E' = (0 : b^2z : c^2y)$. Basta então mostrar que E' está no eixo radical de $\odot DII_A$ e $\odot DI_BI_C$. Vamos calcular a equação das circunferências. Comecemos por DII_A:

$$\begin{aligned}
-abc(a+b+c) + (u_1a + v_1b + w_1c)(a+b+c) = 0 &\implies u_1a + v_1b + w_1z = abc, \\
abc(-a+b+c) + (-u_1a + v_1b + w_1c)(-a+b+c) = 0 &\implies -u_1a + v_1b + w_1z = -abc, \\
-a^2xy - b^2xz - c^2yz + (u_1x + v_1y + c_1z)(x+y+z) = 0 &\implies u_1x + v_1y + w_1z = 0.
\end{aligned}$$

e concluímos que $(u_1, v_1, w_1) = (bc, \frac{-bc^2x}{cy-bz}, \frac{b^2cx}{cy-bz})$.

Agora, para DI_BI_C:

$$\begin{aligned}
abc(a-b+c) + (u_2a - v_2b + w_2c)(a-b+c) = 0 &\implies u_2a - v_2b + w_2c = -abc, \\
abc(a+b-c) + (u_2a + v_2b - w_2c)(a+b-c) = 0 &\implies u_2a + v_2b - w_2c = -abc, \\
-a^2xy - b^2xz - c^2yz + (u_2x + v_2y + c_2z)(x+y+z) = 0 &\implies u_2x + v_2y + w_2z = 0.
\end{aligned}$$

e conseguimos que $(u_2, v_2, w_2) = (-bc, \frac{bc^2x}{cy+bz}, \frac{b^2cx}{cy+bz})$.

Daí fica claro que E' tem mesma potência de ponto em relação a $\odot DII_A$ e $\odot DI_BI_C$ e terminamos!

Concluímos aqui! Espero corrigir problemas de geometria na OBM e achar algumas soluções por barybash motivadas por esse material! Muitas pessoas falam que as contas são só um artifício pra quem não sabe sintética e que não há beleza nelas. Eu vejo muita beleza nelas... Até!

5 Problemas

Tentei trazer problemas recentes. Exceto os da OBM que não me limitei a isso.

Os problemas com (*) são aqueles que não basta ir fazendo conta indefinidamente. São problemas que misturam sintética e contas. E que, as contas são de muito bom grado. Os que tem (**) são os que a sintética não é trivial (no meu ponto de vista, claro) ou nos quais a conta não é tão obvia.

Problema 1. ***(OBM 2015 - P1)*** *Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45$.*

Problema 2. ***(OBM 2013 - P1)*** *Seja Γ um círculo e A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.*

Problema 3. ***(OBM 2012 - P2)*** *Dado um triângulo ABC, o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo* *escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de $I_B I_C$, $I_C I_A$ e $I_A I_B$ respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.*

Problema 4. ***(OBM 2015 - P6)*** *Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, CA, AB, respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC.*

Problema 5. ***(IMO SL 2022 - G1)*** *Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AC = BC$.Um ponto P é escolhido na semireta $\overrightarrow{AB}$ tal que A, B, P estão nessa ordem. O cirncuncírculo de ACD intersecta o segmento PD em D e Q. O circuncírculo de APQ intersecta o segmento PC em P e R. Prove que as retas CD, AQ, BR são concorrentes.*

Solução em [6]

Problema 6. ****(IMO 2019 - P2)*** *Em um triângulo ABC, A_1 está no lado BC e B_1 no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1, respectivamente, tais que $PQ \parallel AB$. Considere P_1 um ponto na reta PB_1 tal que P, B_1, P_1 estão nessa ordem e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Considere Q_1 um ponto na reta QA_1 tal que P, A_1, Q_1 estão nessa ordem e $\angle CQ_1Q = \angle CAB$. Mostre que P_1, Q_1, P, Q estão sobre uma mesma circunferência.*

Solução em [7]

Problema 7. ***(USA TSTST 2023 - P8)*** *Seja ABC um triângulo equilátero com lado de tamanho 1. Tome A_1 e A_2 no segmento BC, B_1 e B_2 no lado AC e C_1 e C_2 no segmento AB tais que $BA_1 < BA_2$, $CB_1 < CB_2$ e $AC_1 < AC_2$. Suponha que B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 concorram e que os perímetros dos triângulos $AB_2C_1, BC_2A_1, CA_2B_1$ sejam iguais. Ache todos os possíveis valores desse perímetro comum.*

Solução em [9]

Problema 8. ***(OBM 2013 - P6)*** *O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.*

Esse é um clássico, e está resolvido em [1].

Problema 9. *****(USEMO 2020 - P3)*** *Seja ABC umtriângulo acutângulo com circuncentro O e ortocentro H. Considere Γ o circuncírculo do triângulo ABC e N o ponto médio de OH. As tangentes à Γ por B e C e a reta por H perpendicular a AN determinam um triângulo com circuncírculo ω_A. Definimos ω_B e ω_C analogamente. Prove que o centro radical de $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ está em OH.*

Solução em [8]

Problema 10. *****(OBM 2014 - P6)*** *Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω. O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta $A1A2$. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYZ e I são colineares*

Solução em [10]

Referências

[1] https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/coordenadas_baricentricas.pdf

[2] Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads,
https://web.evanchen.cc/geombook.html

[3] https://artofproblemsolving.com/community/c6h2965497p26563619 - Quidditch

[4] https://artofproblemsolving.com/community/c5h3038296p27349297 - KevinYang2.71

[5] https://artofproblemsolving.com/community/c5h3038303p27349354 - IAmTheHazard

[6] https://artofproblemsolving.com/community/c6h2882542p25627509 - Taco12

[7] https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2019-notes.pdf

[8] https://artofproblemsolving.com/community/q1h2317631p18471120 - MarkBcc168

[9] https://web.evanchen.cc/exams/sols-TSTST-2023.pdf

[10] https://artofproblemsolving.com/community/c6h612517p3642955 - william122