# Geometria Projetiva

Semana Olímpica 2024 - Bento Gonçalves - RS

Jorge Craveiro - jorgehcrav@gmail.com

## 1 Razão Cruzada, Feixe de Retas, Projeção no Círculo

**Definição 1.1.** Dados os pontos $A$, $B$, $P$ e $Q$ numa reta, a razão cruzada $r(A, B; P, Q)$ é definida como $PA/PB : QA/QB$, segmentos orientados.

**Definição 1.2.** Agora, dado um ponto $X$ fora dessa reta, definimos a razão cruzada para o feixe de retas $XA$, $XB$, $XP$ e $XQ$, como $rX(A, B; P, Q)$, sendo a razão análoga para os senos dos ângulos que enxergam os segmentos correspondentes em $r(A, B; P, Q)$. Observe que $r(A, B; P, Q) = rX(A, B; P, Q)$

**Teorema 1.3.** Se uma reta corta um feixe $X(A, B; P, Q)$ em pontos $A'$, $B'$, $P'$, $Q'$, pelo resultado anterior, $r(A, B; P, Q) = r(A', B'; P', Q')$.

**Teorema 1.4.** E se os pontos $A$, $B$, $P$, $Q$ e $X$ estiverem sobre um círculo, variando-se $X$, a conta $rX(A, B; P, Q)$ não se altera!

## 2 Divisão Harmônica, e coisas que implicam nisso

**Definição 2.5.** Quando $r(A, B; P, Q) = -1$, diz-se que há uma divisão harmônica, ou ainda, que $P$ e $Q$ dividem harmonicamente $AB$, e escreve-se $h(A, B; P, Q)$.

**Lema 2.6.** Sendo $AB$ um segmento, $M$ médio de $AB$, e $Pinf$ o ponto do infinito da reta $AB$, tem-se $h(A, B; M, Pinf)$.

**Lema 2.7.** Seja $XAB$ um triângulo, e $XP$ e $XQ$ bissetrizes interna e externa, respectivamente. Temos $h(A, B; P, Q)$.

**Teorema 2.8.** Seja $ABCD$ completo, de diagonais $AC$, $BD$ e $EF$. As retas $AC$ e $BD$ dividem harmonicamente a diagonal $EF$.

**Teorema 2.9.** Seja $P$ um ponto externo a um círculo, $PC$ e $PD$ segmentos tangentes ao círculo, e uma secante $PAB$. $CD$ corta $AB$ em $Q$. Então: $h(A, B; C, D)$, e $h(A, B; P, Q)$.

### 2.1 Problemas

**Problema 2.1** (OBM2007) Seja $ABCD$ quadrilátero convexo, $P$ a intersecção das retas $AB$ e $CD$, $Q$ a intersecção das retas $AD$ e $BC$, e $O$ a intersecção das diagonais $AC$ e $BD$. Prove que se $\angle POQ = 90°$ então $PO$ é bissetriz de $\angle AOD$ e $OQ$ é bissetriz de $\angle AOB$.

**Problema 2.2** (USATST2011) Seja $ABC$ um triângulo escaleno e acutângulo, $D$, $E$ e $F$ pés das alturas em $BC$, $AC$ e $AB$ respectivamente, $H$ o ortocentro de $ABC$. $P$ e $Q$ estão sobre $EF$, de forma que $APperpEF$, $HQperpEF$. As retas $DP$ e $QH$ se intersectam em $R$. Calcule a razão $HQ/HR$.

**Problema 2.3** Seja $P$ externo a um círculo, $PAB$ uma secante a esse círculo, $PC$ e $PD$ segmentos tangentes ao círculo. Seja $DE$ corda paralela a $AB$. Prove que $CE$ bissecta $AB$.

**Problema 2.4** (OBM2006) Seja $P$ um polígono convexo de $2006$ lados. As $1003$ diagonais de vértices opostos e as $1003$ retas que ligam os pontos médios de lados opostos são todas concorrentes no mesmo ponto. Prove que os lados opostos são todos paralelos e congruentes.

## 3 Polo e Polar, Dualidade e Teorema de Brokard

**Definição 3.1.** (Inversão) Dado um círculo $S$ de centro $O$ e raio $r$, e um ponto $P$ qualquer, define-se inverso de $P$ como $P^*$, o ponto na semirreta $OP$ tal que $OP.OP^* = r^2$.

**Definição 3.2.** (Polar) A reta perpendicular a $OP$ por $P^*$ é chamada de reta polar de $P$ em relação a $S$.

**Teorema 3.3.** (La Hire) Se $Q$ pertence à polar de $P$, então $P$ pertence à polar de $Q$.

**Lema 3.4.** Seja $AB$ corda qualquer, e o pontos $P$ e $Q$ na reta $AB$. Temos $h(A, B; P, Q)$ se, e somente se, $Q$ pertence à polar de $P$.

**Teorema 3.5.** (Brokard) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritivel qualquer de centro $O$, sejam $P$, $Q$ e $R$ as intersecções das diagonais do quadrilátero completo. Então $O$ é ortocentro de $PQR$. (triangulo autopolar)

## 4 Teoremas de Pappus e Pascal

**Teorema 4.1.** (Pappus) Os pontos $A, B, C$ e $A', B', C'$ estão em cada reta, $r$ e $s$. Sejam $X$, $Y$ e $Z$ as intersecções de $(AB', A'B)$, $(AC', A'C)$ e $(BC', B'C)$, respectivamente. Então $X$, $Y$ e $Z$ são colineares.

**Teorema 4.2.** (Pascal) O hexágono $ABCA'B'C'$ é ciclico. Sejam $X$, $Y$ e $Z$ definidos como antes. Então $X$, $Y$ e $Z$ são colineares.

## 5 Mais Problemas

**Problema 5.5** Sejam $D$, $E$ e $F$ pontos de tangencia do incírculo de $ABC$ com os lados $BC$, $AC$ e $AB$, respectivamente. Seja $M$ um ponto tal que o incírculo de $BCM$ tangencia $BC$ em $D$, e os lados $BM$ e $CM$ em $P$ e $Q$. Prove que as retas $EF$, $BC$ e $PQ$ são concorrentes.

**Problema 5.6** (IMO85) Um círculo de centro $O$ passa pelos vértices $A$ e $C$ do triângulo $ABC$, e intersecta os lados $BA$ e $BC$ nos pontos $K$ e $N$. Os circuncírculos dos triângulos $ABC$ e $KBN$ se intersectam nos pontos $B$ e $M$. Prove que $\angle OMB = 90°$.

**Problema 5.7** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo de ortocentro $H$, e seja $D$ o pé da altura de $A$. Seja $T$ um ponto sobre o círculo de diâmetro $AH$ tal que o circuncírculo de $BDT$ é tangente internamente ao círculo de diâmetro $AH$. Seja $N$ médio de $AH$. Prove que $CN$ e $BT$ são perpendiculares.

**Problema 5.8** Seja $W$ o circuncírculo do triangulo $ABC$, e seja $W'$ um círculo que tangencia internamente $W$ no ponto $T$, e também tangencia os lados $AB$ e $AC$ do triângulo nos pontos $K$ e $L$ (círculo mixtilinear). Prove que o incentro de $ABC$ é o ponto médio de $KL$.

**Problema 5.9** (Teorema da Borboleta) Sejam $AB$, $CD$ e $PQ$ cordas de um círculo que se intersectam em $M$, ponto médio de $PQ$. Seja $X$ a intersecção de $AD$ e $PQ$, e $Y$ a intersecção de $BC$ e $PQ$. Prove que $M$ também é ponto médio de $XY$.

**Problema 5.10** Seja $ABC$ um triângulo com incentro I, e pontos de tangencia $D$, $E$ e $F$ com incírculo. As retas $EF$ e $BC$ se intersectam em $K$. Prove que $IK$ é perpendicular a $AD$.

**Problema 5.11** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo, $AD$ altura, e $P$ um ponto sobre $AD$. As retas $BP$ e $CP$ intersectam os lados $AC$ e $AB$ nos pontos $E$ e $F$, respectivamente. Prove que $\angle EDP = \angle PDF$.

**Problema 5.12** Seja $ABC$ um triângulo de incentro I. Seja $D$ o pé da perpendicular de I a $BC$, e $P$ o pé da perpendicular de I a $AD$. Prove que $PD$ bissecta o ângulo $\angle BPC$.

**Problema 5.13** (IMO2014) Sejam $P$ e $Q$ pontos sobre o lado $BC$ de um triângulo acutângulo $ABC$ tais que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Sejam $M$ e $N$ pontos sobre $AP$ e $AQ$ respectivamente tais que $P$ é médio de $AM$ e $Q$ é médio de $AN$. Prove que a intersecção de $BM$ e $CN$ está sobre o circuncírculo de $ABC$.