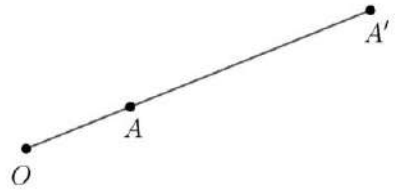
Homotetia

Prof. Onofre Campos

onofrecampos@gmail.com

Definição: Dados um ponto $\boldsymbol{O}$ e um número real $\boldsymbol{k}$, com $\boldsymbol{k \neq 0}$ e $\boldsymbol{k \neq 1}$, a *homotetia* $\boldsymbol{\lambda}$ de centro $\boldsymbol{O}$ e razão $\boldsymbol{k}$ é a transformação geométrica que a cada ponto $\boldsymbol{A \neq O}$ associa o ponto A' tal que

$$\overrightarrow{OA'} = k.\overrightarrow{OA}.$$



O ponto A' é chamado *imagem de* A *pela homotetia* λ. As imagens de todos os pontos de uma figura F formam uma figura F' semelhante a F e com razão de semelhança igual a k. A homotetia é também chamada de *semelhança central.*

A igualdade vetorial tem duas implicações importantes:

i) Os pontos O, A e A' serão sempre colineares;
ii) $OA'/OA = |k|$.

Além disso, a igualdade vetorial permite que k seja negativo. Se $|k| > 1$, dizemos que a homotetia é uma dilatação; Se $0 < |k| < 1$, a homotetia é uma contração.

Usaremos a notação $\lambda(O, k)$ para designar a homotetia λ de centro em O e razão k. Denotaremos ainda a imagem de A por $\lambda(A)$, ou seja, $\lambda(A) = A'$. Ainda podemos escrever

$$A \xrightarrow{\lambda} A'$$

para dizer que o ponto A é levado no ponto A' pela homotetia λ.

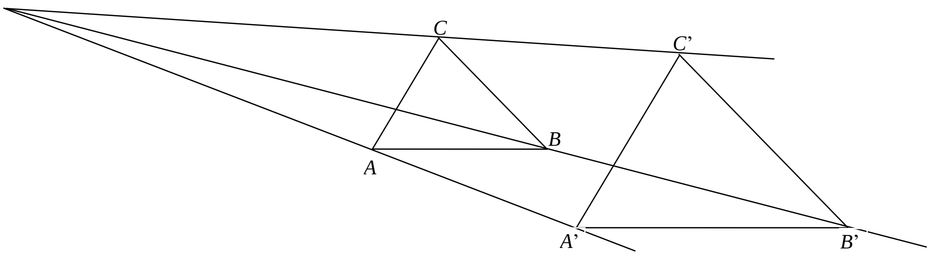
Proposição 1: Se A' e B' são as imagens de A e B por uma homotetia de centro O e razão k, então:

$$A'B' \parallel AB \quad \text{e} \quad \frac{A'B'}{AB} = |k|.$$

Demonstração: Observe que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} = k \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Esta igualdade vetorial garante que $A'B' \ // \ AB$ e $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \therefore A'B' = |k| \cdot AB$.

Proposição 2: Uma reta r que não passa pelo centro O é levada em uma reta r', paralela a r.

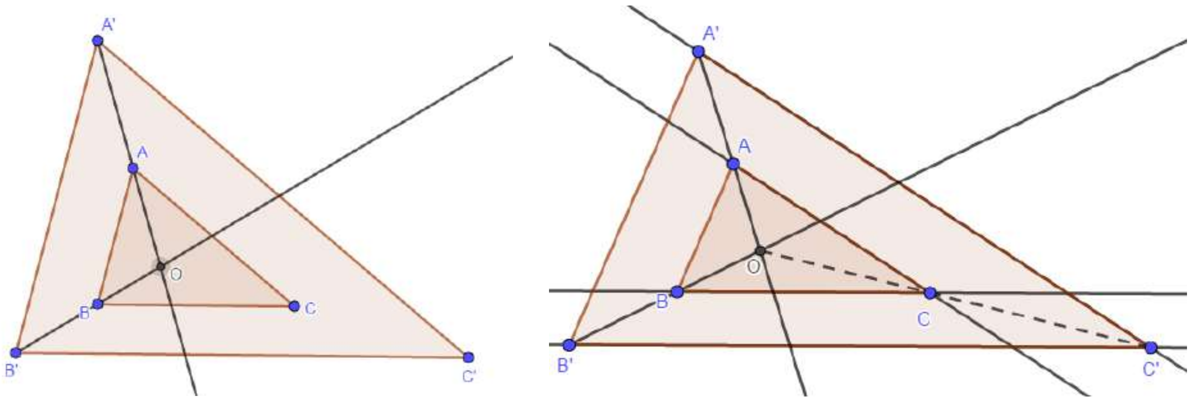
Teorema (Desargues) Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos tais que $A'B' \ // \ AB$, $B'C' \ // \ BC$ e $A'C' \ // \ AC$, então as retas AA', BB' e CC' são concorrentes em um único ponto, o qual é o centro de uma homotetia que leva o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$.



Demonstração: Seja O o ponto de interseção entre AA' e BB'. Vamos mostrar que O, C e C' são colineares. Como $A'B'$ // AB, existe uma homotetia σ de centro O que leva A em A' e B em B'. Basta mostrarmos que o ponto C' é a imagem de C por esta homotetia. Sejam r e s as retas suportes dos lados AC e BC, respectivamente. Por um lado, veja que

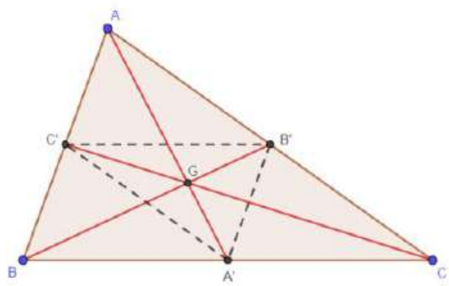
$$r \xrightarrow{\sigma} A'C' \quad \text{e} \quad s \xrightarrow{\sigma} B'C'.$$

Como $C = r \cap s$, então $\sigma(C) = \sigma(r) \cap \sigma(s) = r' \cap s' = C'$. Logo, como $\sigma(C) = C'$, então O, C e C' são colineares. Logo, AA', BB' e CC' concorrem no ponto O, centro da homotetia que leva o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$.



Proposição: Se ABC é um triângulo transformado no triângulo $A'B'C'$ por uma homotetia de centro O e se P e P' são pontos correspondentes nos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, então o ponto P é levado no ponto P' por essa homotetia. Dessa forma, o baricentro é levado no baricentro, o incentro é levado no incentro, e assim por diante.

Uma aplicação imediata do teorema de Desargues é a concorrência das medianas de um triângulo.



Na figura, veja que $A'B'$ // AB, $B'C'$ // BC e $A'C'$//AC. Logo, AA', BB' e CC' são concorrentes num mesmo ponto G, pelo teorema de Desargues. Além disso, existe uma homotetia $\sigma\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ que leva o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$. Também, o ortocentro de ABC será levado no ortocentro do triângulo $A'B'C'$.

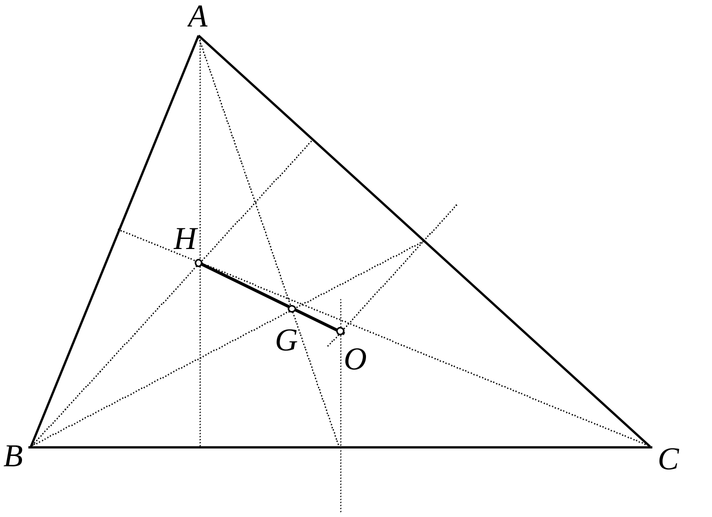
Algumas Aplicações

A reta de Euler

Num triângulo ABC, seja G o baricentro, O o circuncentro e H o ortocentro. Como já vimos anteriormente, os pontos O, G, e H são colineares e $HG/GO = 2/1$. A reta que contém esses pontos é chamada *reta de Euler* do triângulo ABC.

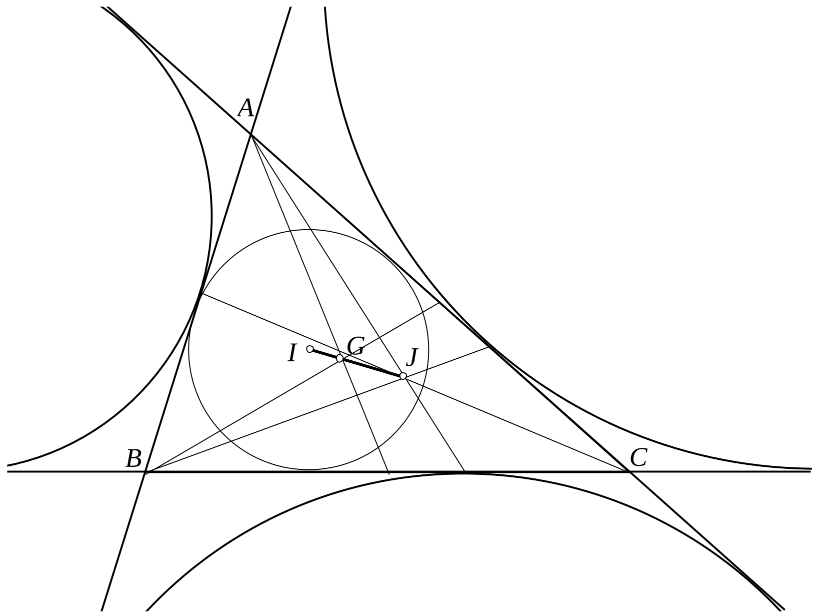
Daremos aqui uma outra demonstração: Considere a homotetia $\sigma(G, -1/2)$. Esta homotetia transforma o triângulo ABC no triângulo MNP cujos vértices são os pontos médios de BC, AC e AB, respectivamente. Seja h a perpendicular a BC por A. σ transforma h na perpendicular a NP (portanto a BC) que contém o ponto M, ou seja, transforma h na mediatriz de BC. O mesmo se dá em relação aos outros dois vértices B e C. Logo σ transforma as três alturas do triângulo ABC nas três mediatrizes.

Como as três mediatrizes de ABC se cortam no ponto O e as três alturas se cortam em H segue que a homotetia σ transforma o ponto H no ponto O. Daí resulta que os pontos H, G e O são colineares, com G entre H e O e $HG/GO = 2/1$.



O Ponto de Nagel

As retas que ligam os vértices de um triângulo ABC aos pontos onde os lados opostos são tangentes aos correspondentes círculos ex-inscritos são concorrentes em um ponto J. Este ponto é colinear com o baricentro G e com o incentro I do triângulo ABC e $JG/GI = 2/1$. Este ponto é chamado *ponto Nagel* do triângulo ABC. A demonstração será deixada como exercício.



Sejam D, E e F os pontos de tangência das circunferências ex-inscritas com os lados BC, CA e AB, respectivamente. Sejam M, N e P os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Podemos provar que $IM \,//\, AD$, $IN \,//\, BE$ e $IP \,//\, CF$. Agora, considere a homotetia $\sigma(G, -2)$, que transforma o triângulo MNP no triângulo ABC. Como $M \to A$, a reta (infinita) IM é levada numa reta paralela a IM passando por A. Logo, IM é levada na reta AD. Analogamente, as retas IN e IP são levadas nas retas BE e CF, respectivamente. Como cada uma das retas IM, IN, IP passa pelo ponto I, então cada uma das retas AD, BE, CF passa pelo ponto $J = \sigma(I)$. Isso significa que AD, BE e CF concorrem no ponto J, o qual satisfaz $\overrightarrow{GJ} = -2 \cdot \overrightarrow{GI}$. Logo, J, G e I são colineares (nesta ordem) e $JG : GI = 2 : 1$.

Problemas Propostos

01. Prove que as três retas através dos pontos médios dos lados de um triângulo e paralelas às bissetrizes dos ângulos opostos são concorrentes em um ponto. Em geral, mostre que se três cevianas são concorrentes em um único ponto, então as retas paralelas às cevianas passando pelos pontos médios dos lados correspondentes também são concorrentes.

02. (Irã – 1995) Sejam M, N, P os pontos de interseção do círculo inscrito no triângulo ABC com os lados AB, AC e BC, respectivamente. Prove que o ortocentro de MNP, o incentro de ABC e o circuncentro de ABC são colineares.

03. (OBM – 2001) Em um quadrilátero convexo, a altura em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto em comum se, e somente se, o quadrilátero é inscritível, isto é, existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.

04. (Teorema de Monge) Dados três círculos que não se intersectam, considere as interseções das tangentes externas traçadas a cada par de círculos. Mostre que estes três pontos são colineares.

05. Seja S um ponto no interior do triângulo ABC. M, N e P são os pontos tais que $BSCM$, $CSAN$ e $ASBP$ são paralelogramos. Prove que AM, BN e CP são concorrentes em um ponto colinear com S e com o baricentro de ABC.

06. Suponha que o círculo inscrito S do triângulo ABC encontra o lado BC no ponto D. O círculo ex-inscrito tangente ao lado BC e aos prolongamentos de AB e AC encontra o lado BC no ponto E. Prove que AE encontra S em um ponto D_1 diametralmente oposto a D.

07. (IMO – 1992) No plano, sejam C um círculo, ℓ uma reta tangente ao círculo C e M um ponto sobre ℓ. Ache o lugar geométrico de todos os pontos P com a seguinte propriedade: existem pontos Q e R sobre ℓ tais que M é o ponto médio de QR e C é o círculo inscrito no triângulo PQR.

08. (IMO Shortlist 2005/G1) Em um triângulo ABC satisfazendo $AB + BC = 3AC$, o incírculo tem centro I e toca os lados AB e BC nos pontos K e L, respectivamente. Sejam K e L os simétricos de D e E em relação ao ponto I. Prove que o quadrilátero $ACKL$ é cíclico.

09. (IMO Shortlist 2006/G2) Seja $ABCD$ um trapézio com lados paralelos $AB > CD$. Os pontos K e L encontram-se sobre os segmentos AB e CD, respectivamente, tais que $AK/KB = DL/LC$. Suponha que existam pontos P e Q sobre o segmento KL satisfazendo

$$\angle APB = \angle BCD \qquad \text{e} \qquad \angle CQD = \angle ABC.$$

Prove que os pontos P, Q, B e C são concíclicos.

10. (IMO Shortlist 2007/G8) O ponto P encontra-se sobre o lado AB de um quadrilátero convexo $ABCD$. Seja ω o incírculo do triângulo CPD e seja I o seu incentro. Suponha que ω é tangente aos incírculos dos triângulos APD e BPC nos pontos K e L, respectivamente. As retas AC e BD encontram-se em E e as retas AK e BL encontram-se em F. Prove que os pontos E, I e F são colineares.

11. (IMO – 2011) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ. Sejam r uma reta tangente a Γ e r_a, r_b e r_c as retas obtidas refletindo-se r em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Mostre que o circuncírculo do triângulo formado por r_a, r_b e r_c é tangente ao círculo Γ.

12. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e P o encontro das diagonais. Se os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são todos iguais, calcule a soma

$$\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{CD} + \frac{CD}{DA} + \frac{DA}{AB}.$$

13. (IMO – 1981/5) Três círculos congruentes têm um ponto em comum O e encontram-se no interior de um triângulo. Cada círculo toca um par de lados do triângulo. Prove que o incentro e o circuncentro do triângulo e o ponto O são colineares.

14. (IMO – 1982/2) Um triângulo não isósceles $A_1A_2A_3$ é dado e tem lados a_1, a_2 e a_3 (a_i é oposto a A_i). Para todo $i = 1, 2, 3$, M_i é o ponto médio do lado a_i e T_i é o ponto em que o incírculo toca o lado a_i. Denote por S_i a reflexão de T_i na bissetriz interna de $\angle A_i$. Prove que as retas M_1S_1, M_2S_2 e M_3S_3 são concorrentes.

15. (OBM – 2012/2) Dado um triângulo ABC, o *ex-incentro* relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A, I_B e I_C os ex-incentros do triângulo escaleno ABC, relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.

16. (OBM – 2014/1) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são todos iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

17. (OBM – 2014/6) Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω. O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYZ e I são colineares.

18. (OBM – 2017/5) No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

19. (OBM – 2005/5) Seja ABC um triângulo acutângulo e F o seu *ponto de Fermat*, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os ângulos $\angle AFB$, $\angle BFC$ e $\angle CFA$ medem 120°. Para cada um dos triângulos ABF, ACF e BCF trace a sua *reta de Euler*, ou seja, a reta que liga o seu baricentro ao seu circuncentro. Prove que essas três retas são concorrentes em um ponto.

20. (USAMO – 1999) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com $AB \,//\, CD$. O círculo inscrito ω do triângulo BCD encontra CD em E. Seja F o ponto da bissetriz interna de $\angle DAC$ tal que $EF \perp CD$. O circuncírculo de ACF encontra a reta CD em C e G. Prove que o triângulo AFG é isósceles.

21. (EGMO – 2016/04) Dois círculos ω_1 e ω_2, de raios iguais, intersectam-se em pontos distintos X_1 e X_2. Considere um círculo ω tangente externamente a ω_1 em T_1 e tangente internamente a ω_2 em T_2. Prove que as retas X_1T_1 e X_2T_2 intersectam-se em um ponto sobre ω.

22. (Tournment of Towns – 2003) O triângulo ABC tem ortocentro H, incentro I e circuncentro O. Seja K o ponto em que o círculo inscrito toca o lado BC. Se IO é paralelo a BC, prove que AO é paralelo a HK.

23. (IMO – 2008) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB \neq BC$. Denote os incírculos dos triângulos ABC e ADC por ω_1 e ω_2, respectivamente. Suponha que exista um círculo ω tangente às semirretas BA e BC, que também é tangente às retas AD e CD. Prove que as tangentes externas comuns a ω_1 e ω_2 intersectam-se sobre ω.

(Dica: Mostre que $AB + AD = CB + CD$).