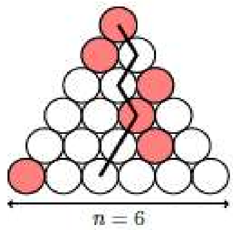
SO 2024 – Nível 3

Ideiazinhas de Combinatória

Régis

Problema 5 da IMO 2023

Problema 5. Seja n um inteiro positivo. Um *triângulo japonês* consiste em $1+2+\cdots+n$ círculos iguais formando um triângulo equilátero tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, a i-ésima linha contém exatamente i círculos, com exatamente um deles pintado de vermelho. Um *caminho ninja* num triângulo japonês é uma sequência de n círculos começando com o círculo da primeira linha e indo sucessivamente de um círculo para um dos dois círculos imediatamente abaixo dele e terminando na última linha. Na figura seguinte há um exemplo de um triângulo japonês com $n = 6$, no qual há um caminho ninja contendo dois círculos vermelhos.



Em função de n, encontre o maior k tal que em qualquer triângulo japonês existe um caminho ninja contendo pelo menos k círculos vermelhos.

Muitos de vocês já devem ter pensado nesse problema, mas aqui eu gostaria de comentar uma das soluções do banco que não foi utilizada pelos alunos da equipe do Brasil. Eu vou quebrar essa solução em passos.

1. Faça "camadas" de círculos vermelhos de modo que só seja possível passar por um círculo por camada.

2. Para chegar na cota correta cada camada vai de 2^k até $2^{k+1} - 1$.

3. Para cada círculo escreva o número máximo de círculos vermelhos num caminho que termina neste círculo.

4. Sejam c_1, c_2, ..., c_k os números da linha k com c_m o máximo da linha e $s_k = c_1 + \cdots + c_k$. Prove que $s_{k+1} \geq s_k + c_m + 1$.

5. Prove que se $s_{2^j} \geq 2^j \cdot j + 1$, então $s_{2^{j+1}} \geq 2^{j+1} \cdot (j+1) + 1$.

Problema 5 da IMO 2019

Problema 5. O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que acaba depois de três operações.

(a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.

(b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

Novamente, um problema que muitos de vocês conhecem, mas gostaria que todos conhecessem!

1. O item a só existe para quem a pergunta do item b faça sentido.

2. Faça casos pequenos até $n = 4$. Observe padrões. O que precisa acontecer se a última moeda for H?

3. Relacione sequências de tamanho com n com sequências de tamanho $n - 1$.

Problemas

1. (IMO SL 1994) Peter tem 3 contas em um banco, cada uma com um número inteiro de dólares. Ele só tem permissão para transferir dinheiro de uma conta para outra se a quantidade de dinheiro nesta última for duplicada. Prove que Peter sempre pode transferir todo o seu dinheiro para duas contas (ou seja, pode zerar uma das contas). Ele sempre pode transferir todo o seu dinheiro para uma conta?

2. (IMO SL 2005) Uma casa possui um número par de lâmpadas distribuídas entre seus cômodos, de forma que haja pelo menos três lâmpadas em cada cômodo. Cada lâmpada compartilha um interruptor com exatamente uma outra lâmpada, não necessariamente da mesma sala. Cada mudança no interruptor compartilhado por duas lâmpadas altera seus estados simultaneamente. Prove que para cada estado inicial das lâmpadas existe uma sequência de mudanças em alguns dos interruptores, ao final da qual cada sala contém lâmpadas acesas e também apagadas.

3. (IMO SL 2009) Considere 2009 cartas, cada uma com um lado dourado e um lado preto, dispostas paralelamente numa mesa. Inicialmente todas as cartas mostram seus lados dourados. Dois jogadores, posicionados do mesmo lado da mesa, fazem movimentos alternados. Cada movimento consiste em escolher um bloco de 50 cartas consecutivas, a mais à esquerda mostrando dourado, e virando-as todas, então aquelas que mostravam dourado agora mostram preto e vice-versa. O último jogador que pode fazer um movimento vence.
(a) O jogo termina necessariamente?
(b) Existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador?

4. (IMO 2017) Seja N > 2 um inteiro dado. Um conjunto de N(N + 1) jogadores de futebol, todos de diferentes alturas, colocam-se em fila. O treinador deseja retirar N(N-1) jogadores desta fila, de modo que a fila que sobra formada pelos 2N jogadores restantes satisfaça as N condições seguintes:
(1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos.
(2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto.
...
(N) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais baixos.
Demonstre que isto é sempre possível.

5. (IMO SL 2019) A sequência infinita a_0, a_1, a_2, ... de (não necessariamente distintos) inteiros tem as seguintes propriedades: $0 \leq a_i \leq i$ para todos os inteiros $i \geq 0$ e

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + \cdots + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

para todos os inteiros $k \geq 0$.
Prove que todos os inteiros $N \geq 0$ aparecem na sequência.

6. (IMO 2021) Dois esquilos, Bushy e Jumpy, recolheram 2021 nozes para o inverno. O Jumpy numera as nozes desde 1 até 2021 e escava 2021 pequenos buracos no chão numa disposição circular à volta da sua árvore favorita. Na manhã seguinte, o Jumpy observa que o Bushy colocou uma noz em cada buraco, mas sem ter em conta a numeração. Não contente com isto, o Jumpy decide reordenar as nozes realizando uma sequência de 2021 movimentos. No k-ésimo movimento o Jumpy troca as posições das duas nozes adjacentes à noz com o número k. Prove que existe um valor de k tal que, no k-ésimo movimento, as nozes trocadas têm números a e b tais que a < k < b.

7. (IMO SL 2022) Seja n um número inteiro positivo. Começamos com n pilhas de pedras, cada uma contendo inicialmente uma única pedra. Pode-se realizar movimentos da seguinte forma: escolher duas pilhas, pegar uma quantidade igual de pedras de cada pilha e formar uma nova pilha com essas pedras. Para cada positivo inteiro n, encontre o menor número de pilhas não vazias que se pode obter realizando um sequência finita de movimentos desta forma.