Jogos Mortais: Enigmas Matemáticos

27ª Semana Olímpica – Bento Gonçalves, RS

Prof. Davi Lopes – Nível 3

1. Exercícios de Aquecimento

Exercício 1 (O Carcereiro Sádico): Seja $n \geq 2$ um inteiro. Numa prisão, n presos estão tentando a liberdade, e para tanto eles jogam o seguinte jogo: um carcereiro muito sádico colocou um chapéu em cada um deles, e cada chapéu tem uma dentre n cores distintas, cores essas que todos os prisioneiros conhecem. (pode haver dois prisioneiros com a mesma cor de chapéu). Cada prisioneiro pode ver as cores dos chapéus dos outros prisioneiros, mas não pode ver a cor do próprio chapéu. Além disso, os presos não podem se comunicar entre si, mas eles podem falar para o carcereiro qual a cor que ele acredita ser a de seu chapéu. Se algum prisioneiro acertar a cor de seu chapéu, ele e os outros companheiros são libertados. Caso contrário, passarão o resto da vida sofrendo horrores.

Determine se, antes de participar desse jogo mortal, os prisioneiros conseguem combinar uma estratégia libertadora escapar dessa situação.

Exercício 2 (IMO/2000): Existem 10 bolas coloridas de azul, branco, preto, vermelho e verde, duas bolas de cada cor. Existem 8 dessas bolas que têm o mesmo peso. As outras duas são da mesma cor, têm o mesmo peso e cada um deles pesa 1 grama a mais do que qualquer uma das 8 restantes. Temos uma balança especial de dois pratos: ao colocar dois grupos de bolas na balança, um em cada prato, a balança mostra qual grupo é mais pesado e qual é a diferença exata entre os pesos dos grupos.

Qual é o número mínimo de pesagens necessárias para determinar com certeza a cor das duas bolas mais pesadas?

Exercício 3 (IMO/2000): Um mágico tem cem cartões numerados de 1 a 100. Coloca-os em três caixas, uma vermelha, uma branca e uma azul, de modo que cada caixa contém pelo menos um cartão. Uma pessoa da platéia escolhe duas das três caixas, seleciona um cartão de cada caixa e anuncia a soma dos números dos dois cartões que escolheu. Ao saber esta soma, o mágico identifica a caixa da qual não se retirou nenhum cartão. De quantas maneiras podem ser colocados todos os cartões nas caixas de modo de que este truque sempre funcione? (Duas maneiras consideram-se diferentes se pelo menos um cartão é colocado numa caixa diferente).

Exercício 4 (OMpD/2022): Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

(i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;
(ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda)

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \to 88 \to 151 \to 51 \to 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \to 145 \to 288 \to 431 \to 574 \to 717 \to 860 \to 1003 \to 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

2. Problemas Propostos

Problema 1: De uma delegacia de polícia situada em uma estrada reta, em ambas as direções, um ladrão roubou um carro da polícia. Sua velocidade máxima é igual a 99,9% da velocidade máxima de um cruzador policial. Quando o roubo é descoberto algum tempo depois, um policial começa a perseguir o ladrão em um cruzador. No entanto, ele não sabe em que direção ao longo da estrada o ladrão foi, nem sabe há quanto tempo o carro foi roubado. É possível o policial pegar o ladrão?

Problema 2 (Sérvia/2012): Temos $n > 1$ pilhas de moedas, cada uma delas com um número infinito de moedas. Existem dois tipos diferentes de moedas: moedas reais e falsas; todas são iguais em forma, mas moedas do mesmo tipo têm a mesma massa, enquanto moedas de tipos diferentes têm massas diferentes. As moedas que pertencem à mesma pilha são do mesmo tipo. Conhecemos a massa de cada moeda real.

Encontre o número mínimo de pesagens na balança digital que precisamos para concluir quais pilhas consistem em que tipo de moedas e também a massa da moeda falsa.

Problema 3 (IOM/2021): Temos um cofre que pode ser aberto digitando um código secreto composto por n dígitos, cada um deles sendo 0 ou 1. Inicialmente, foram inseridos n zeros e o cofre é fechado (portanto, todos os zeros não são o código secreto).

Em uma tentativa, você pode inserir uma sequência arbitrária de n dígitos, cada um deles sendo 0 ou 1. Se a sequência inserida corresponder ao código secreto, o cofre será aberto. Se a sequência inserida corresponder ao código secreto em mais posições do que a sequência inserida anteriormente, você ouvirá um clique. Em quaisquer outros casos, o cofre permanecerá trancado e não haverá clique.

Encontre o menor número de tentativas que seja suficiente para abrir o cofre em todos os casos.

Problema 4 (Rioplatense/2023): Mati está brincando com algumas caixas mágicas e uma máquina. Cada caixa tem um valor dentro. Ao abrir uma caixa o Mati vê o seu valor, soma o valor da caixa à sua pontuação e ela é destruída (se a pontuação da caixa for negativa, o Mati perde pontos). Colocando uma caixa mágica com valor X na máquina, esta caixa é destruída e obtemos duas caixas mágicas de valores $X + 1$ e $X - 1$ (não se sabe qual é cada uma, mas sabe-se quais são as novas caixas).

No início do jogo Mati tem 0 pontos e uma caixa mágica cujo valor ele sabe ser igual a 0. É possível Mati ter 1.000.000 pontos ou mais, sem ter menos de -42 pontos a qualquer momento?

Problema 5 (IMO/2021): Dois esquilos, Bushy e Jumpy, recolheram 2021 nozes para o inverno. O Jumpy numera as nozes desde 1 até 2021 e escava 2021 pequenos buracos no chão numa disposição circular à volta da sua árvore favorita. Na manhã seguinte, o Jumpy observa que o Bushy colocou uma noz em cada buraco, mas sem ter em conta a numeração.

Não contente com isto, o Jumpy decide reordenar as nozes realizando uma sequência de 2021 movimentos. No k-ésimo movimento o Jumpy troca as posições das duas nozes adjacentes à noz com o número k. Prove que existe um valor de k tal que, no k-ésimo movimento, as nozes trocadas têm números a e b tais que $a < k < b$.

Problema 6 (Rioplatense/2022): Na Villa Par, todas as moedas autênticas pesam um número par de gramas e todas as moedas falsas pesam um número ímpar de gramas. Existem 2022 moedas, entre as quais se sabe que exatamente 2 são falsas. Existe uma balança eletrônica que informa apenas se o peso total dos objetos nela colocados é par ou ímpar. Determine o valor mínimo de k para o qual existe uma estratégia que permite identificar as duas moedas falsas utilizando a balança eletrônica no máximo k vezes.

Problema 7 (Rioplatense/2022): No quadro está escrito um número inteiro positivo N. Em cada etapa Carla pode realizar qualquer uma das seguintes operações:

- alterar o número para um múltiplo positivo do número que foi escrito;
- alterar o número para um que tenha os mesmos dígitos do número que foi escrito, mas em uma ordem diferente (é permitido que o novo número comece com 0). Por exemplo, se 2022 estiver escrito, com esta operação Carla pode escrever qualquer um dos números 222, 2202 ou 2220.

Determine todos os valores de N para os quais Carla pode obter 1 após etapas sucessivas.

Problema 8 (OMpD/2021): Branca de Neve possui, em seu enorme cesto, 2021 maçãs, e ela sabe que exatamente uma delas possui um veneno mortal, capaz de matar um ser humano horas após ingerir apenas um mísero pedaço. Ao contrário do que diz os contos de fadas, Branca de Neve é mais malévola do que a Rainha Má, e não se importa com a vida dos sete anões. Por isso, ela decidiu usá-los para descobrir qual maçã é envenenada.

Para tanto, no começo de cada dia, Branca de Neve prepara algumas saladas de maçã (cada salada é a mistura de pedaços de algumas maçãs escolhidas por ela), e obriga alguns dos anões (possivelmente todos) a comer uma salada cada um. No fim do dia, ela observa quem morreu e quem sobreviveu, e no dia seguinte ela novamente prepara algumas saladas de maçã, obrigando alguns dos anões sobreviventes (possivelmente todos) a comer uma salada cada um. E ela continua a fazer isso, dia após dia, até descobrir a maçã envenenada ou até que todos os anões morram.

(a) Prove que existe uma estratégia na qual Branca de Neve consegue descobrir a maçã envenenada depois de alguns dias.

(b) Qual é o número mínimo de dias que Branca de Neve necessita para descobrir a maçã envenenada, independentemente da sorte que ela tenha?

Problema 9 (A Volta do Carcereiro Sádico): Seja $n \geq 7$ um inteiro. Numa prisão, n prisioneiros estão tentando a liberdade (sim, eles foram pegos de novo!), e para tanto eles jogam o seguinte jogo: um carcereiro muito sádico coloca um chapéu em cada um deles, e cada chapéu tem uma dentre 5 cores distintas (o governo gastou muita verba para prender novamente esses n caras, de modo que ficaria caro ter n cores), cores essas que todos os prisioneiros conhecem. (pode haver dois prisioneiros com a mesma cor de chapéu). Como antes, cada prisioneiro pode ver as cores dos chapéus dos outros prisioneiros, mas não pode ver a cor do próprio chapéu.

A seguir, os presos são colocados em fila, e o carcereiro pergunta a cada um deles, segundo a ordem da fila: "Você sabe qual a cor do seu chapéu?". Se o preso disser "não", então ele passará o resto de sua vida preso. Caso ele diga sim, o preso deve cochichar no pé do ouvido do carcereiro a cor de seu chapéu. Se ele acertar, é solto, mas se errar ficará preso pelo resto de sua vida (o sadismo desse carcereiro continua o mesmo!). Observe que cada preso escuta quando outro diz sim ou não, mas não escuta a resposta que ele dá ao carcereiro.

Sabendo que os presos podem combinar uma estratégia para se dar bem nesse jogo antes da chegada do carcereiro, mas que eles não podem mais se comunicar após a chegada do carcereiro, determine o maior número possível de presos que podemos garantir que serão libertos, independentemente de como o carcereiro colocará os chapéus em seus presos.

Problema 10 (Rioplatense/2023 – Adaptada): Sejam $n > d > 0$ inteiros. Val, Davi e Miguelito jogam um jogo de cabra cega em uma sala quadriculada infinita. Inicialmente, Val e Miguelito ocupam quadrados a uma distância n, e um doce está num quadrado de distância d de Miguelito. Miguelito está com os olhos vendados e só vê seu quadrado. Val e Davi podem ver a sala toda. São realizados alternadamente os seguintes movimentos:

1. Miguelito move-se a uma casa adjacente. Se ele encontra Val, Miguelito perde. Se ele encontra o doce, mas não Val, Miguelito ganha. Se nem Val, nem o doce estiverem nesse quadrado, Davi fala para Miguelito "Quente" ou "Frio" segundo sua escolha.
2. Val move-se para uma casinha adjacente. Se Miguelito ou o doce estiverem nessa casinha, Ana vence. Caso contrário, o jogo continua.

Determine, em função de d, o menor n tal que Davi e Miguelito podem combinar uma estratégia de modo a assegurar a vitória de Miguelito, independente das posições iniciais de Val, Miguelito e do doce.

Observação: Duas casinhas são adjacentes se compartilham um lado comum. A distância entre duas casinhas X e Y é o menor p tal que existem casinhas $X = X_0$, X_1, ..., $X_p = Y$ com X_i e X_{i+1} adjacentes, para $0 \leq i \leq p - 1$ (se $X = Y$, a distância entre X e Y é igual a 0).

Problema 11 (IMO/2012): O *desafio do mentiroso* é um jogo para dois jogadores A e B. As regras do jogo dependem de dois inteiros positivos k e n conhecidos por ambos os jogadores. No início do jogo, o jogador A escolhe inteiros x e N com $1 \leq x \leq N$. O jogador A mantém x em segredo, e diz a B o verdadeiro valor de N. Em seguida, o jogador B tenta obter informação acerca de x fazendo perguntas a A da seguinte maneira: em cada pergunta, B especifica um conjunto arbitrário S de inteiros positivos (que pode ser um dos especificados nalguma pergunta anterior), e pergunta a A se x pertence a S. O jogador B pode fazer tantas perguntas desse tipo como deseje. Depois de cada pergunta, o jogador A deve responder imediatamente com sim ou não, mas pode mentir tantas vezes como queira. A única restrição é que dadas quaisquer $k + 1$ respostas consecutivas, pelo menos uma deve ser verdadeira. Quando B tenha feito tantas perguntas como pretenda, deve especificar um conjunto X com no máximo n inteiros positivos. Se x pertencer a X então ganha B; caso contrário, B perde. Prove que:

(a) Se $n \geq 2^k$, então B pode garantir a sua vitória.

(b) Para todo k suficientemente grande, existe um inteiro $n \geq 1{,}99^k$ tal que B não pode garantir a sua vitória.

Problema 12 (IMO/2017): Um coelho invisível e um caçador jogam da seguinte forma no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do coelho e o ponto de partida B_0 do caçador são iguais. Depois de $n-1$ rodadas do jogo, o coelho encontra-se no ponto A_{n-1} e o caçador encontra-se no ponto B_{n-1}. Na n-ésima rodada do jogo, ocorrem três coisas na seguinte ordem:

(i) O coelho move-se de forma invisível para um ponto A_n tal que a distância entre A_{n-1} e A_n é exatamente 1.

(ii) Um aparelho de localização informa um ponto P_n ao caçador. A única informação garantida pelo aparelho ao caçador é que a distância entre P_n e A_n é menor ou igual a 1.

(iii) O caçador move-se de forma visível para um ponto B_n tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é exatamente 1.

É sempre possível que, qualquer que seja a maneira em que se mova o coelho e quaisquer que sejam os pontos informados pelo aparelho de localização, o caçador possa escolher os seus movimentos de modo que depois de 10^9 rodadas o caçador possa garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual que 100?