Pensando assintoticamente

Marcelo ML

SO 2024

1 Resumo teórico

1.1 Notação assintótica

Definição 1. Sejam $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Dizemos que $f = O(g)$ se existem constantes $c, n_0 > 0$ tal que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

$f = O(g)$ realmente significa que f *não cresce mais rápido* que g, quando desconsideramos constantes.

Exemplos:

- $3x + 1 = O(x)$, e também $x = O(3x + 1)$
- $1000m^2 = O(m^3)$, mas não $m^3 = O(1000m^2)$
- $n \log n = O(n^{1,00001})$

Nota. De fato, $O(g)$ não é uma função, mas o *conjunto de funções* que g "domina". Seria mais preciso escrever $f \in O(g)$, mas vamos permitir esse abuso de notação nas contas para simplificar os argumentos.

Observe que com essa notação é verdade que $O(n) = O(n^2)$, mas **não** que $O(n^2) = O(n)$.

Definição 2. Sejam $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Dizemos que $f = o(g)$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Em outras palavras, f cresce *estritamente mais devagar* que g.

Exemplos:

- $1000m^2 = o(m^3)$
- $n \log n = o(n^{1,00001})$

Definição 3. Sejam $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Escrevemos $f \sim g$ se $f(n) = g(n) + o(g(n))$, ou ainda: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Exemplos:

- $n^2 \sim n^2 + 50n^{1,99}$
- $\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \sim n \log n$ (log na base e)

Nota. As definições acima muitas vezes são usada com funções que também podem atingir valores negativos. Nesses casos, é normal considerar os valores absolutos das funções.

Definição 4. Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. A *densidade de A sobre* $\mathbb{N}$ é igual a

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n}$$

se o limite existir.

1.2 Fatos úteis

Proposição 5 (Teorema do Número Primo)**.**

Se $\pi(n)$ é o número de primos entre 1 e n, então $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$.

Se p_n é o n-ésimo primo, então $p_n \sim n \log n$.

Proposição 6 (Stirling)**.**

$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Uma forma levemente mais fraca: $n! \sim n \log n - n$.

2 Problemas

Problema 1 (OBM 2020)**.** Para a inteiro positivo, defina $F_1^{(a)} = 1$, $F_2^{(a)} = a$ e, para $n > 2$, $F_n^{(a)} = F_{n-1}^{(a)} + F_{n-2}^{(a)}$. Um inteiro positivo é fibonático quando é igual a $F_n^{(a)}$ para algum a inteiro positivo e algum $n > 3$. Prove que existem infinitos números inteiros que não são fibonáticos.

Problema 2 (OBM 2022)**.** Sendo n inteiro positivo, defina $S(n)$ como o menor inteiro positivo tal que $S(n)$ e n têm a mesma paridade, $S(n) \geq n$ e tais que **não** existam inteiros positivos $k, x_1, x_2, \ldots, xk$ tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ e $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = S(n)$.

Prove que existem uma constante real $c > 0$ e um inteiro positivo n_0 tal que $S(n) \geq cn^{3/2}$ para todo $n > n_0$.

Problema 3 (OBM 2015)**.** Dado um natural $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, sua *falsa derivada* é definida por

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} ... \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}.$$

Prove que existem infinitos naturais n tais que $f(n) = f(n-1) + 1$.

Problema 4 (KöMaL A863)**.** Seja $n \geq 2$ um inteiro. Encontre o maior N tal que existem infinitos conjuntos de N inteiros consecutivos tais que nenhum deles tem um divisor positivo que é uma potência perfeita n-ésima.

Problema 5 (USAMO 2014)**.** Prove que existe uma constante $c > 0$ com a seguinte propriedade:

Se a, b, n são inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a+i, b+j) > 1$ para todo $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, então

$$\min\{a, b\} > c^n \cdot n^{\frac{n}{2}}.$$

(Bônus: prove com n^n no lugar de $n^{\frac{n}{2}}$.)

Problema 6 (China 2023)**.** Prove que existe $C > 0$ tal que vale a seguinte afirmação:

Para qualquer progressão aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots$, se o máximo divisor comum de a_1 e a_2 é livre de quadrados, então existe $m \leq C \cdot {a_2}^2$ tal que a_m é livre de quadrados.

Problema 7 (China TST 2018)**.** Dado um inteiro positivo k, dizemos que n é *bom* se entre os números

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

pelo menos $0,99n$ deles são divisíveis por k. Mostre que existe um inteiro positivo N tal que pelo $0,99N$ dos números $1, 2, \ldots, N$ são bons.

Problema 8 (China TST 2015)**.** Prove que $n^2 + 1$ é livre de quadrados para infinitos naturais n.

Problema 9 (Canadá 2020)**.** Seja $S = \{1, 4, 8, 9, 16, ...\} = \{n^k | n, k \in Z, k \geq 2\}$ o conjunto das potências perfeitas. Os elementos de S são ordenados em uma sequência crescente (a_i). Prove que existem infinitos n tais que $9999 \mid a_{n+1} - a_n$.

Problema 10 (Zhautykov 2022)**.** Um polinômio $f(x)$ de coeficientes reais e grau maior que 1 é dado. Prove que existem infinitos inteiros positivos que não podem ser representados na forma

$$f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n+k),$$

com n e k inteiros positivos.

Problema 11 (Zhautykov 2023)**.** Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_k$ naturais quaisquer. Seja $S(n)$ o número de soluções inteiras não negativas da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = n$. Suponha que $S(n) \neq 0$ para todo n grande o suficiente. Mostre que para todo n suficientemente grande vale $S(n+1) < 2S(n)$.

(Bônus: prove com $1,0001$ no lugar de 2.)

Problema 12 (Ibero 2023)**.** Seja P um polinômio de grau maior ou igual a 4 com coeficientes inteiros. Um inteiro positivo x chama-se P-representável se existem números inteiros a e b tais que $x = P(a) - P(b)$. Demonstre que, se para todo $N \geq 0$, mais da metade dos inteiros do conjunto $\{0, 1, \ldots, N\}$ são P-representáveis, então todos os inteiros pares são P-representáveis ou todos os inteiros ímpares são P-representáveis.

Problema 13 (Sudoeste Chinês 2020)**.** Ordene todos os inteiros positivos livres de quadrados em ordem crescente $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Prove que existem infinitos inteiros n, tais que $a_{n+1} - a_n = 2020$.