TEORIA EXTREMAL DOS GRAFOS

GUILHERME ZEUS DANTAS E MOURA

O tipo padrão de problema em Combinatória Extremal tem o seguinte formato: *“Determine o número máximo ou mínimo de certos objetos em uma estrutura com certas restrições.”*

Em alguns problemas, é possivel determinar exatamente o desejado número extremal de objetos. Em outros, uma boa estimativa já é um resultado muito interessante.

Como achar um valor máximo

Para determinar que o número máximo de certo objeto é L, você precisa fazer duas coisas.

Primeiro, mostre um exemplo de configuração que atinja esse valor L, proposto como máximo. Segundo, mostre que em toda configuração a quantidade do certo objeto é menor ou igual a L.

Ambos os passos são essenciais.

Teoremas Fundamentais: Teoria de Ramsey

Problema 1. Determine o número mínimo de pessoas numa festa de modo que exista um trio de amigos ou um trio de desconhecidos.

Problema 2 (Teorema de Ramsey)**.** Todos os pares de números naturais são ligados por uma aresta, que pode ter uma dentre r cores. Existe um subconjunto infinito A que é monocromático, ou seja, a cor das arestas entre quaisquer dois elementos de A é a mesma.

Definição (Número de Ramsey)**.** Seja $R(k)$ o menor número n tal que, para toda coloração com duas cores das arestas do grafo completo K_n, existe um subconjunto monocromático com k vértices.

Seja $R(s,t)$ o menor número n tal que, para toda coloração com duas cores das arestas do grafo completo K_n, existe um subconjunto monocromático com s vértices de uma cor ou t vértices de outra cor.

Exercício 3. Determine $R(3)$, $R(3,4)$ e $R(4)$.

---

22 de Janeiro de 2024.
27ª Semana Olímpica, Bento Gonçalves, Rio Grande do Sul, Brasil.
`guilhermezeus.com`.

Exercício 4. Dada a sua solução do Problema 2, ache uma cota superior para $R(k)$. (A minha solução dá $R(k) \lesssim 2^{2k}$.)

Exercício 5. Prove que

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Exercício 6. Prove que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Problema 7 (Erdős, 1947)**.**

$$\sqrt{2}^k \leq R(k).$$

Teorema (Erdős–Szekeres, 1947)**.**

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \approx \frac{1}{\sqrt{k}} 4^k.$$

Teorema (Campos, Griffiths, Morris e Sahasrabudhe (2023))**.**

$$R(k) \leq (4-\epsilon)^k.$$

Teoremas Fundamentais: Números de Turán

Definição (Número de Turán)**.** Seja $\mathrm{ex}(n,H)$ o número máximo de arestas em um grafo G com n vértices que não contém H como subgrafo.

Problema 8. Determine $\mathrm{ex}(n,K_3)$.

Problema 9. Determine $\mathrm{ex}(n,K_{r+1})$.

Problema 10. Determine $\mathrm{ex}(n,C_4)$.

Exercício 11. Se H é um grafo não bipartido, prove que $\mathrm{ex}(n,H) \geq n^2/4$.

Problema 12. Seja H um grafo bipartido. Prove que $\mathrm{ex}(n,H) \leq C \cdot n^{2-\epsilon}$ para algum C e $\epsilon > 0$.

Problema 13. Seja T uma árvore com k vértices. Prove $\frac{k-2}{2}n \leq \mathrm{ex}(n,T) \leq (k-1)n$.

Erdős e Sós conjecturam que $\mathrm{ex}(n,T) = \frac{k-2}{2}n$. Ajtai, Komlós, Simonovits e Szemerédi (c. 2000) provaram que a conjectura é verdade para k suficientemente grande (apesar de nunca publicarem).

Resultados Autorais

Um grafo outerplanar é um grafo planar cuja face exterior inclui todos os vértices do grafo.

Problema 14. Determine o número máximo de arestas em um grafo outerplanar com n vértices.

Problema 15. Determine o número máximo de arestas em um grafo outerplanar com n vértices sem ciclos de tamanho 3.

Problema 16. Determine o número máximo de arestas em um grafo outerplanar com n vértices sem ciclos de tamanho 4.

Problema 17. Determine o número máximo de arestas em um grafo outerplanar com n vértices sem ciclos de tamanho 5.

Questão 18 (Győri, Dantas e Moura e Zhou (2023))**.** Determine o número máximo de arestas em um grafo outerplanar com n vértices sem ciclos de tamanho k.

Questão 19 (Győri, Dantas e Moura e Zhou (2023), em aberto)**.** Determine o número máximo de caminhos com k elementos em um grafo outerplanar com n vértices.

Exercícios Extras

Problema 20 (Alberta 2007)**.** Seja n um inteiro positivo. Um teste possui n problemas, e foi escrito por vários alunos. Exatamente três alunos resolveram cada problema, cada par de problemas foi resolvido por exatamente um aluno, e nenhum aluno resolveu todos os problemas. Determine o maior valor possível de n.

Problema 21. Seja G um grafo. É possível particionar os vértices de G em dois grupos de modo que, para cada vértice, pelo menos metade de seus vizinhos estejam no outro grupo?

Problema 22 (Canadá 2006)**.** Considere um torneio com $2n+1$ times, onde cada time joga exatamente uma vez contra cada outro time. Dizemoss que três times X, Y, Z formam um triciclo se X vence Y, Y vence Z e Z vence X.

(a) Determine o mínimo número de triciclos possíveis.
(b) Determine o máximo número de triciclos possíveis.

Problema 23 (Polônia 1997)**.** São dados n pontos no círculo unitário. Mostre que no máximo $n^2/3$ dos segmentos com extremidades entre os n pontos dados têm comprimento maior que $\sqrt{2}$.

Problema 24. Dados n pontos no plano, prove que o número de pares de pontos que estão a distância 1 um do outro é no máximo $n^2/3$.

Problema 25 (Romênia)**.** Dados n pontos no plano, sem três colineares, prove que existe um conjunto de pelo menos $\sqrt{n}$ pontos tal que nenhum três pontos do conjunto formam um triângulo equilátero.

Problema 26 (Banco IMO 2002)**.** Numa festa com 120 pessoas, um *quarteto fraco* é um conjunto de quatro pessoas tal que exatamente uma das seis possíveis duplas de pessoas no quarteto são amigas. Determine o número máximo de quartetos fracos.

Problema 27 (Crux Mathematicorum)**.** Seja S um conjunto de n pontos no plano, sem três colineares ou quatro concíclicos. Defina $f(S)$ como o número de pares de pontos (P, Q) tais que existe um círculo que contém P e Q em seu interior, mas nenhum outro ponto de S. Determine o valor máximo de $f(S)$, em termos de n.

Referências

Ajtai, Miklós, János Komlós, Miklós Simonovits e Endre Szemerédi (c. 2000). *Erdős–Sós Conjecture holds for large k*. Não publicado.

Campos, Marcelo, Simon Griffiths, Robert Morris e Julian Sahasrabudhe (16 de mar. de 2023). *An Exponential Improvement for Diagonal Ramsey*. DOI: 10.48550/arXiv.2303.09521. arXiv: 2303.09521 [math]. preprint.

Győri, Ervin, Guilherme Zeus Dantas e Moura e Runtian Zhou (30 de set. de 2023). *Outerplanar Turán Number of a Cycle*. DOI: 10.48550/arXiv.2310.00557. arXiv: 2310.00557 [math]. preprint.

Morris, Robert e Roberto Imbuzeiro Oliveira (2011). "Extremal and Probabilistic Combinatorics". Em: *28º Colóquio Brasileiro de Matemática*. ISSN: 978-85-244-319-4. URL: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/28CBM_04.pdf.

Tang, Adrian (2008). *Graph Theory*. Canada IMO Training. URL: https://web.mit.edu/yufeiz/www/imo2008/tang-graph.pdf.