OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
27^a **Semana Olímpica - Bento Gonçalves - RS.**
21 a 26 de janeiro de 2024.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

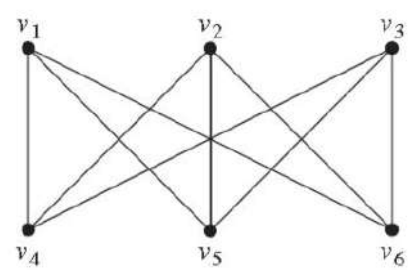
Um convite à combinatória algébrica: Matrizes que contam! - Nível Universitário.

1 Introdução

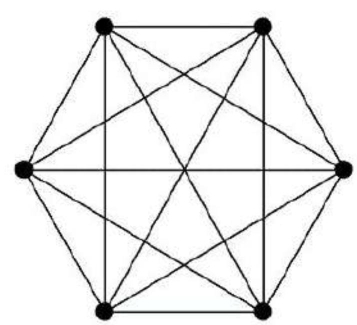
Nestas breves notas de aula vamos fazer uma rápida incurssão à Combinatória Algébrica. Como o próprio nome sugere, vamos utilizar ferramentas da Álgebra para resolver problemas de combinatória. Há diversas possibilidades para fazer essa breve incurssão; seja por problemas de contagem do número de possibilidades que satisfazem um certa configuração preestabecida num dado problema, seja por problemas envolvendo colorações, partições de um inteiro, entre tantas outras possibilidades. O caminho que vamos seguir é através de problemas que podem ser modelados pela **Teoria dos grafos**. Particularmente, vamos mostrar como contar a quantidade de certos caminhos dentro de uma dado grafo. Vamos mostrar como, de modo simples, podemos utilizar conceitos básicos de Álgebra Linear, tais como matrízes, autovetores e autovalores, podem ser ferramentas bastante adequadas para atacar esse tipo de problema. Destacamos mais uma vez, que isso é um breve aperitivo à Combinatória algébrica. Existem muitas outras ferramentas algébricas, tais como a Teoria dos grupos, Polinômios, séries formais, entre tantas outras que podem se mostrar adequadas para resolver problemas de Combinatória. Convidamos o leitor mais curioso a dar uma olhada em [2] para connhecer uma pouco mais. Esperamos, como sempre, que esse texto sirva de estímulo, que aguce a sua curiosidade para conhecher mais sobre esse belo tópico da Matemática moderna. Sejam bem vindos e vamos lá! É hora de começar!

2 Caminhos em grafos

Um **GRAFO** (finito) pode ser considerado como um par $G = (\mathbb{V}, E)$, onde $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é um conjunto de pontos (chamados **vertices**) e $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ é um conjunto de linhas (chamadas de **arestas**) que conectam um ou dois pontos de $\mathbb{V}$. Quando uma aresta e_s conecta dois vértices v_i e v_j de $\mathbb{V}$, diz-se que essa aresta é incidentes aos vértices v_i e v_j. No caso em que uma aresta saí e retorna para um mesmo vértice, diz-se que ela é um **loop**.

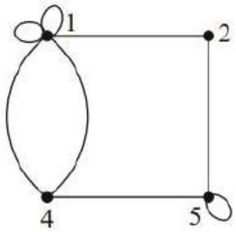


Um grafo sem loops é chamado **simples**, enquanto que um grafo sem loops em que dois vértices quaisquer são sempre ligados por uma aresta é chamado de **grafo completo**.



Definição. 2.1 (Matriz de adjacência)**.** *Dado um grafo finito G com vertices $v_1, v_2, \cdots, v_n$ associamos a ele uma matriz, chamada* **matriz de adjacência do grafo** *como sendo uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tal que a_{ij} é o número de arestas que estão incidentes aos vértices v_i e v_j.*

Por exemplo, para o grafo



a matriz de adjaceência assume a forma

$$A(G) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora veremos como, a partir da matriz de ajacência de um grafo podemos extrair informações muito interessantes. Para isso, iniciaremos com a definição do que vem a ser um caminho num grafo G.

Definição. 2.2. *Um caminho de comprimento $\ell \geq 1$ num grafo G, ligando dois vértices u e v é uma sequência*

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_\ell, e_\ell, v_{\ell+1}$$

tal que

- *Cada v_i é um vértice de G;*
- *Cada e_j é uma aresta de G;*
- *Os vértices de e_i são v_i e v_{i+1}, para $1 \leq \ell \leq \ell$.*
- *$v_1 = u$ e $v_{\ell+1} = v$.*

Teorema. 1. *Para todo inteiro positivo $\ell \geq 1$, o elemento que ocupa a linha i e a coluna j da matriz $A(G)^\ell$ é igual ao número de caminhos de comprimento ℓ que ligam os vértices v_i e v_j.*

Mais curioso que o teorema acima é o fato que podemos obter uma fórmula explicíta para o número $A(G)^\ell)_{ij}$ de caminhos de comprimento ℓ que ligam os vértices v_i e v_j em função dos autovalores da matriz $A(G)$. Para isso, usaremos fortemente o fato de que a matriz de adjacência de um grafo é sempre simétrica. A chave principal para o estudo dessa questão é o bastante conhecido dos cursos de Álgebra Linear, **Teorema espectral**, cujo enunciado relembramos a seguir:

Teorema. 2 (Teorema espectral)**.** *Toda matriz simétrica $A = (a_{ij})_{n\times n}$ com entradas reais é diagonalizável. Além disso, seus auvalores são reais e os autovetores associados formam um conjunto ortonormal do $\mathbb{R}^n$. Equivalentememte, existem uma matriz ortogonal (real) P e uma matriz diagonal D (real), tais que*

$$A = PDP^{-1}.$$

A demonstração desse resultado por ser encontrada, por exemplo, em [1].

Como a matriz de adjacência de um grafo é sempre simétrica (e portanto diagonalizável) os autovalores dessa matriz são costumeiramente chamados de **autovalores do grafo**, apesar de ser um abuso de linguagem.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de $A(G)$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são os respectivos autovetores (vistos como vetores-coluna $n \times 1$), segue que $\langle u_i^t . u_j \rangle = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). Sendo $P = (p_{pij})$ a matriz que tem colunas $u_1, u_2, \ldots, u_n$, segue que

$$P^t = P^{-1} = \begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix} ouseja, éamatrizcujaslinhassãoosvetores$$

u$_1^t, u_2^t, \ldots, u_n^t$. Sabemos, da Álgebra Linear que nessas circunstâncias temos a seguinte igualdade:

$$P^{-1}A(G)P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teorema. 3. *Dado um grafo finito G, fixe dois vértices v_i e v_j. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da matriz de adjacência $A(G)$. Então exietem números reais $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que*

$$(A(G)^\ell)_{ij} = c_1\lambda_1^\ell + \cdots + c_n\lambda_n^\ell$$

Além disso, se $U = (u_{ij})$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de $A(G)$, tem-se que $c_k = u_{ik}v_{jk}$.

Corolário. 1. *Se $A(G))$ tem auto valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, o número de caminhos fechados de comprimento ℓ em G é dado por*

$$f_G(\ell) = \lambda_1^\ell + \cdots + \lambda_n^\ell$$

Lema. 1. *Seja J uma matrix $n \times n$ cujos elementos são todos iguais a 1. Os autovalores de J são n (com multiplicidade 1) e 0 (com multiplicidade $n-1$).*

Teorema. 4. *Os autovalores de um grafo completo K_n são -1 (com multiplicidade $n-1$) e $n-1$ (com multiplicidade 1).*

Corolário. 2. *O número de caminhos fechados de comprimento ℓ em K_n a partir do vértice v_i é dado por*

$$(A(K_n)^\ell)_{ii} = \frac{1}{p}\left((p-1)^\ell + (p-1)(-1)^\ell\right).$$

A seguir apresentamos uma proposição que é bastante últil para a resolução de alguns problemas.

Proposição. 1. *Suponha que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ e $\beta_1, \ldots, \beta_s$ são números complexos não nulos tais que par todo inteiro positivo ℓ, tem-se que*

$$\alpha_1^\ell + \ldots + \alpha_r^\ell = \beta_1^\ell + \ldots + \beta_s^\ell,$$

então $r = s$ e os $\alpha's$ corrspondem a uma permutação dos $\beta's$.

3 Problemas propostos

1. Suponha que um grafo G possua 12 vértices e que o número decaminhos fehados de comprimento ℓ em G seja $\Gamma(G) = 3.5^\ell + 4^\ell + 2.(-2)^\ell + 4$. Mostre que os autovalores da matriz de adjacência do grafo, $A(G)$ são
$$5, 5, 5, 4, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 0, 0.$$

2. Suponha que um grafo G possua 15 vértices e que o número de caminhos fechados de comprimento ℓ em G é $8^\ell + 2 \cdot 3^\ell + 3 \cdot (-1)^\ell + (-6)^\ell + 5$. Seja G' o grafo obtido de G por adição de um loop em cada um dos vértices de G. Quantos caminhos de comprimento ℓ o grafo G' possui?

3. Um G está bipartido por (A, B) quando o sue conjunto de vértices V se escrece como uma união disjunta $A \cup B$ de dois subconjunto de V, tais que toda aresta de G é incidente a um vértice de A e a um vértice de B. Mostre que os autovalores de $A(G)$, matriz de adjacência do grafo, ocorrem aos pares $\pm\lambda$.

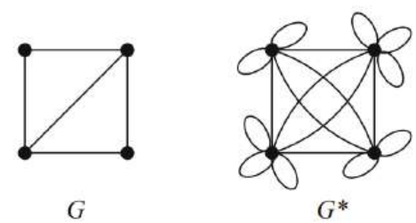
4. Nas condições do item anterior, mostre que o polinômio característico de $A(G), p(x) = \det(xI - A(G))$ é da forma $g(x^2)$ para algum polinômio $g \in \mathbb{R}[x]$, se o número de vértices de G é par, ou $xg(x^2)$, se o número de vértides de G é ímpar.

5. Seja G um grafo finito cujos autovalores são $_1, \ldots, \lambda_p$. Seja$G(n)$ um grafo obtido de G substituindo cada vértice v de G por um conjunto V_v de n vértices, tal que se uv é uma aresta de G, então existe uma aresta de cada vértice V_u para cada vértice de V_v (e não existem outras arestas). Determine os autovalores de $G(n)$ em função dos autovalores de G.

6. Seja G um grafo finito com p vértices. Seja G' um grafo obtido de G colocando uma nova aresta r_v incidente em cada vertice v, o outro vértice de e_n será denoado por v'. Então G' tem p novas arestas e p novos vértices. Todos os novos vértices tem grau 1. Mostre que se G tem autovalores λ_i, ntão G' tem autovalores $\frac{\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2+4}}{2}$. (Pode ser dada uma prova algébrica e outra combinatória!).

7. Seja G um grafo finito com vértices $v_1, \ldots, v_p$ e autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Sabe-se que para cada par i e j (entre 1 e p) existem números reais $c_1(i,j), \ldots, c_p(i,j)$ tais que para todo $\ell \geq 1$,
$$(A(G))^\ell)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} c_k(i,j)\lambda_k^\ell.$$
   (a) Mostre que $c_k(i,i) \geq 0$.
   (b) Se $i \neq j$, mostre que podemos ter $c_k(i,j) < 0$.

8. Seja G um grafo finito com vértices $v_1, \ldots, v_p$ e autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Seja G^* um grafo com os mesmos vértces de G e com $\eta(u,v)$ arestas etre u e v (incluindo $u = v$), onde $\eta(u,v)$ é o número de caminhos em G de comprimento 2 ligando u e v, por exemplo,



   Determine os autovalores de G^* em função dos autovalores de G.

Referências

[1] HOFFMANN, Kenneth; KUNZE, Ray Alden. Linear algebra. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

[2] STANLEY, Richard P. Algebraic combinatorics. Springer, v. 20, n. 22, p. 4, 2013.

[3] STANLEY, Richard P.; STANLEY, Richard P. What is enumerative combinatorics?. Springer US, 1986.

[4] STANLEY, Richard P. Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition. Cambridge studies in advanced mathematics, 2011.

[5] VAN LINT, Jacobus Hendricus; WILSON, Richard Michael. A course in combinatorics. Cambridge university press, 2001.