OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
27^a Semana Olímpica - Bento Gonçalves - RS.
21 a 26 de janeiro de 2024.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Existe a soma! Alguns critérios especiais de convergência - Nível Universitário.

---

1 Introdução

É praticamente obrigatória nas mais diversas competições Matemáticas nacionais e internacionais (nível universitário) a presença de questões envolvendo sequências e séries de números reais. Em Matemática, há diversas situações em que o interesse é apenas saber se uma dada série tem soma finita ou não (converge ou não!). Nos bons livros existentes existem muitos critérios, a partir dos quais podemos saber se uma dada série é convergente ou não sem necessariamente ter que obter a soma explícita da série, no caso convergente, tais como o Critério do termo geral, o Teste da razão, O Critério de d'Alembert, o Critério da comparação, entre tantos outros existentes. Aqui nestas notas, inicialmente faremos um apanhado de todos esses critérios mais usuais, exemplificando-os com problemas interessantes e em seguida apresentaremos alguns critérios que não são tão usuais quanto os citados anteriormente, e que mostram-se como ferramentas muito eficientes para decidir se uma dada série numérica é ou não convergente, como por exemplo o critério da condensação de Cauchy, o Critério de Abel, Séries de Bertrand,...entre tantos outros. Como de costume, esperamos que esse material possa sevir de porta de entrada nesse vasto assunto e que possa estimular o leitor a querer saber mais sobre o assunto, o que pode ser feito nas ótimas referências que citamos ao final. Então, é hora de começar!

2 Sequências

Como de costume, representaremos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{R}$, o conjunto dos número reais. No uso comum, a palavra **sequência** transmite a ideia de uma lista ordenada de coisas. Na Matemática não é diferente imaginamos uma sequência numérica como uma lista ordenada de números onde o primeiro deles resentamos por a_1, o segundo por a_2, o terceiro por a_3 e assim sucessivamente. Formalmente, podemos definir uma sequência numérica (real) como uma função de $\mathbb{N}$ em em $\mathbb{R}$, conforme a

Definição 2.1. *Um sequência de números reais é uma função*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n = f(n) \end{aligned}$$

Representaremos uma sequência de números reais por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Definição 2.2 (Sequências convergentes)**.** *Dizemos que uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número real a, quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_o \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon.$$

Nesse caso, escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ou simplesmente $a_n \to a$.

3 Notação O e o de Landau

Nesta breve seção introduziremos as notações O grande (ou ozão) e o (ozinho) que foram introduzidas pelo matemático Alenão Edmund Landau e que são bastante úteis no estudo da Teoria dos números e Análise Matemática.

Sejam f e g duas funções definidas no mesmo subconjunto dos números reais pode-se dizer que

$$f(x) = O(g(x)) \text{ quando } x \to \infty$$

se e somente se existe uma constante positiva M tal que para todo valor suficientemente grande de x, o valor absoluto de $f(x)$ é no máximo M multiplicado pelo valor absoluto de $g(x)$. Isto é, $f(x) = O(g(x))$ se e somente se existe um número real positivo M e um número real x_0 tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \text{ para todo } x \geq x_0.$$

O-grande (ou ozão) também pode ser usado para descrever o termo de erro numa aproximação a uma função matemática. Os termos mais significativos são escritos explicitamente, e então os termos menos significativos são resumidos a um único termo O-grande. Considere, por exemplo, série exponencial e duas expressões dela que são válidas quando x é pequeno:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots && \text{para todo } x \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) && \text{as } x \to 0, \\ &= 1 + x + O(x^2) && \text{as } x \to 0. \end{aligned}$$

A segunda expressão (a que possui $O(x^3)$) representa que o valor absoluto do erro $e^x - (1 + x + x^2/2)$ é menor do que alguns termos envolvendo $|x^3|$ quando x é suficientemente próximo de 0.

Por outro lado, A sentença informal "$f(x)$ é o-pequeno de $g(x)$"é escrita formalmente como $f(x) = o(g(x))$, intuitivamente, isso significa que $g(x)$ cresce muito mais rápido que $f(x)$, ou similarmente, que o crescimento de $f(x)$ não é nada comparado ao de $g(x)$. Formalmente, $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to \infty$ significa que para toda constante positiva M existe uma constante $x_o \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \qquad \text{para todo } x \geq x_o\ .$$

Note que a diferença entre a definição formal da notação O-grande, e a definição de o-pequeno: enquanto a primeira deve ser verdade para pelo menos uma constante M a segunda deve se verificar para todas as constantes positivas M, mesmo as pequenas. Dessa maneira, a notação o-pequeno faz uma afirmação mais forte que a da notação O-grande: toda função que é o-pequeno de g também é O-grande de g, mas nem toda função que é O-grande de g também é o-pequeno de g (por exemplo a própria g não é, a menos que ela seja identicamente zero quando $x \to \infty$).

Se $g(x)$ é não nula, ou pelo menos se torna não nula a partir de certo ponto, a relação $f(x) = o(g(x))$ é equivalente a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Por exemplo, $2x = o(x^2), 2x^2 \neq o(x^2)$ e $1/x = o(1)$.

4 Séries numéricas

Dada uma sequência de números reais por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podemos associar a ela a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

que intuitivamente é obtida adicionando-se todos os termos da sequência dada. Nespe ponto cabe a seguinte pergunta: como obter a soma de infinitas parcelas? A definição a seguir tornará precisa essa ideia.

Definição 4.1 (Soma de uma série)**.** *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a associda à sequência de números reais por* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, podemos associar a ela uma nova sequência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, chamada de* **sequência das somas parciais***, definida por*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

A partir dessa nova sequência definimos a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *da seguinte forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Temos então duas possibilidades, saber:

1. *Quando* $\lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{R}$*, temos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$*. Nesse caso dizemos que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** *(ou que a série é convergente) e que a sua soma é igual a* s*.*

2. *Quando* $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$*, temos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$ *ou caso em que* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *não exista, dizemos que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge** *(ou que a série é divergente).*

Dependendo da série, nem sempre é simples obter a sua soma. Na verdade o valor exato da soma é obtido em casos bem particulares, como por exemplo, para a famosa série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ quando $|a| < 1$, ou num caso um pouco mais exótico, como por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (série harmônica) ou ainda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler). Em muitas ocasiões em Matemática tem-se interesse apenas em saber se uma dada série é ou não convergente. Por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, podemos provar que essa série é convergente (vamos mostrar isso mais adiante), o valor exato da sua soma $\zeta(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, que á conhecida como **constante de Apéry** em homenagem a Roger Apéry, que provou em 1977, que esse número é irracional. A Teoria das séries infinitas é cheia de surpresas e resultados belos inusitados, como por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. Nessas notas vamos fazer um breve voo sobre esse terreno para apreciar um pouco a sua paisagem e seus belos resultados.

Uma outra série bastante conhecida (e útil) é a chamada **Série harmônica**, cujos termos são os inversos dos números reais, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

Apesar dos termos dessa série serem cada vez menores, essa série diverge.

De fato, considerando a 2^n-ésima soma parcial da série harmônica, temos:

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\\&+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n}=n\cdot\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Diante do exposto, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=+\infty$ e, por conseguinte $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$, o que nos permite concluir que a série harmônica é divergente.

Um fato bastante interssante relacionado com a série harmômica é mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. *Mostre que existe uma constante $\gamma\in\mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\ln(n)\right)=\gamma$$

Solução. Para cada $n\in\mathbb{N}$, defina $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$. Note que:

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\left(\sum_{n=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)-\left(\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)\\&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n}{n(n+1)}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, segue pelo critério da comparação, que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ é convergente. Isso revela que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ é absolutamente convergente, portanto é convergente. Diante do exposto, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, noutras palavras, existem $\gamma\in\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\gamma$. Diante do exposto,

$$a_n=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma.$$

■

A constante γ descrita no exemplo acima é chamada de **constante de Euler-Mascheroni**. As primeiras casas decimais dessa constante são

$$\gamma=0.5772156649015328606065120900824024 3$$

Entretanto até hoje é um problema em aberto o fato desse número é racional ou irracional.

Há muitas outras questões interessantes relacionas à série harmônica, como por exemplo o estuda da convergência da série dos inversos dos primos, isto é, $\sum\limits_{p\ \text{primo}}\frac{1}{p}$. Em 1860, Leonard Euler provou que a série $\sum\limits_{p\ \text{primo}}\frac{1}{p}$ é divergente. Apesar disso, se $\mathcal{C}$ é oconjunto de todos os números primos conhecidos até hoje, sabe-se que $\sum\limits_{p\in\mathcal{C}}\frac{1}{p}<4$. (Não conhecemos quase nada sobres os números primos!)

Em 1919, o matemático Noroeguês Viggo Brun provou que a série cujos termos são os inversos dos primos gêmeos é convergente, i.e.,

$$\sum_{p\,:\,p+2\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\cdots$$

$$\sum_{p\,:\,p+2\in\mathcal{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)=B_2$$

essa constante é conhecida como constante de Brun. A série $\sum\limits_{p\,:\,p+2\in\mathcal{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)$ tem uma convergência muito lenta. Em 2002, Pascal Sebah e Patrick Demichel utilizando todos os primos gêmeos menores que 10^{16}, estimaram para a constante de Brun o seguinte valor

$$B_2\approx 1.902160583104.$$

Mais recentemente, Dominic Klyve mostrou que $B_2<2.347$.

Definição 4.2 (Rabo da série)**.** *Seja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ uma série numérica. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ de* **rabo da série** *de ordem n. Note que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S_n+R_n,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

No caso em que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, pode-se provar que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, isto é, **rabo da série** converge para 0.

É um fato bastante conhecido da teoria das sequências de números reais que toda sequência crescente e limitada é convergente. Como consequência imediata desse fato temos o seguinte teorema:

Teorema 1. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de termos positivos é convergente se, e somente se, a sequência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *das suas somas parciais é limitada.*

A seguir vamos mostrar alguns casos bem especiais onde a soma dade uma dada série pode ser obtida explicitamente, e em seguida vamos dar um maior enfoque em alguns critérios para determinar se uma dada série é ou não convergente. Nessa trilha apresentaremos de modo suscinto alguns critérios clássicos (encontrados na maiors dos textos sobre o assunto) e por fim daremos uma atenção especial a critérios menos conhecidos, mas que são de grande valia para a determinação da convergência ou não de uma série numérica, que diga-se de passagem são questões frequentes em competições Matemáticas pelo mundo afora.

Definição 4.3 (Séries absolutamente convergentes)**.** *Um série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita* **absolutamente convergente** *quando a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente.*

Teorema 2. *Toda série absolutamente convergente é uma série convergente, ou seja, se* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Nunca é demais lembrar que a recíproca do teorema acima é falsa! Por exemplo, a série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (tem soma $\ln 2$), mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (é a série harmônica!). Esse exemplo dá origem a uma outra momenclatura para esse tipo de série, conforme a definição a seguir.

Definição 4.4 (Série condicionalmente convergentes)**.** *Dizemos que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* **condicionalmente convergente** *quando ela for convergente, mas não for absolutamente convergente, isto é,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, mas* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge.*

Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente. A seguir apresentamos um outro resultado clássico relacioando a essa discussão sobre séries alternadas, ou seja, aquelas séries, cujos termos consecutivos têm sinais distintos.

Teorema 3. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de termos positivos, decrescente tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *é convergente e a sequência dos restos alternados, isto é,* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ *verifica a relação* $|R_n| \le a_{n+1}$.

4.1 Obteve a soma, converge!

Para iniciar o nosso passeio no mundo das séries numéricas, mostraremos alguns exemplos interessantes onde a soma da série pode ser obtida explicitamente, o que, diga-se de passagem, é bastante raro! Normalmente em Matemática, o principal interesse está na convergência (ou não) de uma dada série e não no valor da sua soma exata.

Exemplo 4.2 (OMRN-2018)**.** *Seja* A *o conjunto dos inteiros positivos que não possuem (em sua decomposição) os fatores primos distintos de* 2, 3 *ou* 5. *A soma dos inversos dos elementos de* A*:*

$$S = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\dots$$

pode ser expressa na forma $\frac{a}{b}$, *com* a *e* b *números inteiros postivos relativamente primos, isto é, que satisfazem* $mdc(a,b) = 1$. *Qual o valor de* $a+b$*?*

Solução. Note que nos denominadores das frações dessa soma com infinitas parcelas são números naturais cujos fatores são $2, 3$ ou 5. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{18}+\cdots \\ &= \sum_{a,b,c\ge 0} \frac{1}{2^a}.\frac{1}{3^b}.\frac{1}{5^c} \\ &= \sum_{a\ge 0}\frac{1}{2^a}.\sum_{b\ge 0}\frac{1}{3^a}.\sum_{c\ge 0}\frac{1}{5^c} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} \\ &= 2.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4} \\ &= \tfrac{15}{4} \end{aligned}$$

Assim $\frac{a}{b} = \frac{15}{4}$, i.e., $a = 15$ e $b = 4$, o que revela que $a+b = 19$. ∎

Exemplo 4.3 (MIT)**.** *Qual a soma da série numérica dada por* $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{1988}\right)^{n-1}$*?*

Solução. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{1988}\right)^{n-1} =& 1+2\left(\frac{1}{1998}\right)+3\left(\frac{1}{1998}\right)^2+\cdots\\ =&\left(1+2\left(\frac{1}{1998}\right)+3\left(\frac{1}{1998}\right)^2+\cdots\right)+\\ &+\left(\frac{1}{1998}+\left(\frac{1}{1998}\right)^2+\left(\frac{1}{1998}\right)^3+\cdots\right)+\\ &+\left(\left(\frac{1}{1998}\right)^2+\left(\frac{1}{1998}\right)^3+\left(\frac{1}{1998}\right)^4\cdots\right)\\ =&\frac{1}{1-\frac{1}{1988}}+\frac{\frac{1}{1988}}{1-\frac{1}{1988}}+\frac{\left(\frac{1}{1988}\right)^2}{1-\frac{1}{1988}}+\dots\\ =&\frac{1998}{1997}\left(1+\frac{1}{1998}+\left(\frac{1}{1998}\right)^2+\dots\right)\\ =&\left(\frac{1998}{1997}\right)^2.\end{aligned}$$

∎

Exemplo 4.4 (MIT - Adaptado)**.** *Responda os itens a seguir:*

(*a*) *Seja* $f(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\ldots$, *para* $-1<x<1$. *Calcule* $\sqrt{e^{\int_0^1 f(x)dx}}$.

(*b*) *Calcule e soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^{n-1}}$.

Solução.

(*a*) Nesse caso, como $|x|<1$, $f(x)$ é uma série geométrica convergente. Assim,

$$\begin{aligned}f(x)=&1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\dots\\ =&\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2}{2-x}\end{aligned}$$

Então $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2}{2-x}dx=2\ln 2$. Então

$$\sqrt{e^{\int_0^1 f(x)dx}}=\sqrt{e^{2\ln 2}}=\sqrt{2^2}=2.$$

(*b*) Considerando que $|x|<1$ e $f(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\dots$ tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx=&\int_0^1\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\dots\right)dx\\ =&x+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.2}+\frac{x^3}{3.2^2}+\frac{x^4}{4.2^3}+\dots\\ =&G(x)\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^{n-1}}=&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{4.2^3}+\dots\\ =&G(1)\end{aligned}$$

Como $G(0)=0$, pelo Teorema fundamental do Cálculo, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx=&G(1)-G(0)\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^{n-1}}-0\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^{n-1}}\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo item (a), tem-se que

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2}{2-x}dx=2\ln 2.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^{n-1}}=2\ln 2$.

∎

No caso em que adicionamos uma quantidade finita de parcelas, é bem conhecida a chamada soma telescópica, onde adiciomamos várias parcelas que são constituidas de diferenças de termos consecutivos de uma dada sequência. Essa mesma técnica pode ser estendida para algumas séries infinitas como ilustramos nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 4.5 (Soma telescópica)**.** *Obtenha a soma das séries a seguir:*

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

(*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2}$.

Solução.

(*a*) *Solução.* O termo geral da série é $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Sendo assim, a n-ésima soma parcial é

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty}s_n=1$, já que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Concluímos assim que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$, isto é, a série é convergente e sua soma vale 1. ∎

(*b*) Para começar vamos analisar os primeiros termos da série.

– $n=1\Rightarrow\frac{(-1)^{1+1}}{(-1)^2.1^2}=1$.

- $n = 2 \Rightarrow \frac{(-1)^{2+1}}{1^2-2^2} = \frac{(-1)}{(1-2)(1+2)} = \frac{1}{1.3} = \frac{2}{2.3}$.
- $n = 3 \Rightarrow \frac{(-1)^{3+1}}{1^2-2^2+3^2} = \frac{2}{3.4}$.

$\vdots$

isso sugere que $\frac{(-1)^{n+1}}{1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2} = \frac{2}{n(n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pode-se provar por indução que de fato essa igualdade é verdadeira! diate do exposto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1^2-2^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2} =& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}\\ =&\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n(n+1)}\\ =&\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(2-\frac{2}{k+1}\right)\\ =&2.\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.6. *Mostre que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} = 2$.

Solução. Note que $\frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)(n+1)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}$. Temos então a soma telescópica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(m+1)!} - \frac{1}{(m+2)!}.$$

Passando o limite com $m \to \infty$, segue que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2.$$

■

4.2 Critérios de convergência

Neste ponto faremos um breve resumo dos princiapis citérios de convergência de séries numéricas (as demonstrações desses critérios podem ser encontradas, por exemplo, em [1].

Teorema 4 (Critério do termo geral)**.** *Se uma série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Note que não vale a recíproca to teorma acima , ou seja, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não é ecarrariamente verdade que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ seja convergente. O exemplo mais conhecido desse fato é o da **série harmônica**, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente, apesar do fato de que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Entretanto, é bastante comum o uso da **contapositiva** do teorema acima para provar que uma dada série é divergente, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{é divergente.}$$

Apesar do fato de que $a_n \to 0$ não assegurar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, exibimos a seguir um resultado interessante em relação ao termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que garante a sua convergência.

Teorema 5 (Critério do a_n generalizado)**.** *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos. Se exitir* $\alpha \in (1, \infty)$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Exemplo 4.7. *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^a}$ *converge se, e somente se,* $a > 1$.

Solução. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tem-se que: $n^{\alpha} a_n = a^{\alpha} e^{-(\ln n)^a} = \exp(\alpha \ln n - (\ln n)^a)$. Temos três casos, a saber:

- Se $a > 1$, segue que $\lim_{n\to\infty} (\alpha \ln n - (\ln n)^a) = -\infty$, o que nos permite concluir que $n^{\alpha} a_n \to 0$ e pelo teorema acima segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^a}$ converge.
- Se $a = 1$, segue que $a_n = e^{-(\ln n)^1} = e^{\ln n^{-1}) = \frac{1}{n}}$. Nesse caso,
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
diverge (é a série harmônica!).
- Se $a < 1$, para todo $n \geq 3$, tem-se que
$$e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n},$$
o que nos permite concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^a}$ diverge.

Diante do exposto a série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^a}$ converge se, e somente se, $a > 1$. ■

Teorema 6 (Critério da comparação)**.** *Considere duas séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de números reais tais que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n \leq b_n$, *então*

(*i*) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*

(*ii*) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge;*

Teorema 7. *Considere duas séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de números reais positivos. Então*

(*i*) *Se* $b_n = O(a_n)$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*

(*ii*) *Se* $b_n \sim a_n$ *quando* $n \to \infty$, *então as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *possuem a mesma natureza quanto à convergência, isto é, ou ambas convergem ou ambas divergem.*

Teorema 8 (Critério da integral - Cauchy)**.** *Se os termos da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *formam uma sequência decrescente de termos positivos, isto é,* $0 < a_{n+1} \leq a_n$ *para todo* $n > N$, *onde* $N \in \mathbb{N}$ *é um número natural fixo e existe uma função contínua* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $a_n = f(n)$, $\forall n > N$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

Um outro resultado interessante (e bastante útil) envolvendo a integral de Riemann é o seguinte:

Teorema 9. *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uma função continuua por partes e decrescente. Se, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *definimos* $a_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$, *então*

1. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente;*

2. f *é integrável sobre* $\mathbb{R}^+$ *se, e somente se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *é convergente.*

3. *Se* f *é integrável sobre* $\mathbb{R}$ *ou a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *é convergente, então*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Exemplo 4.8 (Revisitando Euler-Mascheronni)**.** *Mostre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Solução. Considerando a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$ e definindo para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definimos $a_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$, segue que:

$$\sum_{k=2}^{n} a_n = \int_1^n \frac{1}{t}dt - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Pelo teorema anterior, a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ converge. Portanto a sequência $\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \geq 1}$ converge, ou seja, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma$$

dito de outra forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

■

Teorema 10 (Série de Riemann, série p.)**.** *Se* $p \in \mathbb{R}$, *então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é convergente se, e somente se* $p > 1$.

Teorema 11 (Critério de d'Alembert)**.** *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos. Se* $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell, \ell \in [0, +\infty)$, *então*

(*i*) *Se* $\ell < 1$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

(*ii*) *Se* $\ell > 1$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

(*iii*) *Se* $\ell = 1^+$, *isto é , a razão* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *tende a 1 pela direita, quando* $n \to +\infty$, *a série é divergente.*

(*iv*) *Se* $\ell = 1$ *o teste é inconclusivo.*

Exemplo 4.9 (Paul Erdös, American Mathematical Monthy)**.** *Seja* $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência estritamente crescente de números inteiros positivos tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = \infty.$$

Prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *é convergente e que a sua soma é um número irracional.*

Solução. De fato, como a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots,)$ é estritamente crescente, segue que para $n \geq 3$, tem-se que $a_{n+1} \geq 3a_n$. Portanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Pelo critério de d'Alembert, segue que a série é convergente!

Para mostrarmos que a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é irracional, usaremos redução ao absurdo! De fato, suponha, por absurdo, que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Para $n \geq 3$ tem-se que:

$$\frac{a_{j+1}}{a_1 a_2 \ldots a_j} \geq 3a, \text{ se } j \geq n.$$

Então,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\frac{p}{q}\Rightarrow q\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{a_i}=p\Rightarrow$$

$$p(a_1a_2\ldots a_n)=q(a_1a_2\ldots a_n)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{a_i}\Rightarrow$$

$$p(a_1a_2\ldots a_n)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{a_i}.$$

Agora podemos escrever

$$p(a_1a_2\ldots a_n)-\sum_{i=0}^{n}\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{a_i}=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{a_i}$$

Note que o primeiro membro é um número inteiro. Já o segundo membro,

$$\begin{aligned}0<\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{a_i}&\leq\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{a_{n+1}}+\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{3a_{n+1}}+\cdots\\ &\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots\\ &=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{qa_1a_2\ldots a_n}{a_i}$ não é um inteiro, o que é uma contradição. Portanto a nossa suposição inicial de que a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ seja racional não pode ser verdadeira. Portanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

■

Teorema 12 (Critério de Cauchy)**.** *Seja* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *uma série de termos positivos. Se* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$*, com* $\ell\in[0,+\infty)$*, então*

(i) Se $\ell<1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *converge.*

(ii) Se $\ell>1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *diverge.*

(iii) Se $\ell=1^+$*, isto é , a razão* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *tende a 1 pela direita, quando* $n\to+\infty$*, a série é divergente.*

(iv) Se $\ell=1$ *o teste é inconclusivo.*

4.3 Alguns critérios especiais de convergência

Teorema 13 (Série de Bertrand)**.** *Para todo par* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *fixado, a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ *é convergente se, e somente se* $\alpha>1$ *ou* $\alpha=1$ *e* $\beta>1$*.*

Teorema 14 (Critério da condensação de Cauchy)**.** *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais positivos. Definindo* $b_n=2^n\cdot a_{2^n}$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ é convergente } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ é convergente.}$$

Exemplo 4.10. *Usando o critério de condensação de Cauchy, mostre que a série harmônica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *é divergente.*

Solução. Com efeito, nesse caso, $a_n=\frac{1}{n}$, o que nos permite concluir que

$$b_n=2^n\cdot a_{2^n}=2^n\cdot\frac{1}{2^n}=1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ora, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\ldots$ é divergente, segue que a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente. ■

Exemplo 4.11. *A série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ *é convergente ou divergente?*

Solução. Nesse caso, $a_n=\frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ e

$$b_n=2^n\cdot a_{2^n}=2^n\times\frac{1}{2^n\sqrt{\log(2^n)}}=\frac{1}{\sqrt{n\log 2}}=\frac{1}{\sqrt{\log 2}}\cdot\frac{1}{n^{1/2}}$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\log 2}}\cdot\frac{1}{n^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{\log 2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}.$$

Ora, como $\frac{1}{\sqrt{\log 2}}$ é uma constante real, e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ é uma série p com $p=\frac{1}{2}<1$, segue que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ é divergente, o que revela, pelo Critério de Condensação de Cauchy, que a série original $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ também é divergente. ■

Exemplo 4.12. *Se os termos da série (de termos positivos) convergente* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *decrescem monotonicamente, mostre que* $\displaystyle\lim_{k\to\infty}ka_k=0$*.*

Solução. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, segue pelo critério de condensação de Cauchy, que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}2^j.a_{2^j}$ é convergente, o que implica $\displaystyle\lim_{j\to\infty}2^j.a_{2^j}=0$. Se k é tal que $2^j\leq k\leq 2^{j+1}$, tem-se que

$a_k \leq a_{2^j}$, já que (a_n) é decrescente. Ora, como $0 \leq k \leq 2^{j+1}$ e $0 \leq a_k \leq a_{2^j}$, segue que $0 \leq ka_k \leq 2^{j+1}a_{2^j}$. Portanto,

$$0 \leq ka_k \leq 2^{j+1}.a_{2^j} \Rightarrow 0 \leq ka_k \leq 2.2^j a_{2^j}$$

Agora perceba que $k \to \infty$ implica $j \to \infty$, visto que $2^j \leq k \leq 2^{j+1}$. Por fim, passando o limite com $k \to \infty$, obtemos:

$$0 \leq ka_k \leq 2.2^j.a_{2^j} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} 0 \leq \lim_{k\to\infty} ka_k \leq \lim_{k\to\infty} \left(2.2^j.a_{2^j}\right) \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} ka_k \leq 2.\underbrace{\lim_{j\to\infty} 2^j.a_{2^j}}_{=0} \Rightarrow 0 \leq \lim_{k\to\infty} ka_k \leq 0.$$

Portanto, $\lim_{k\to\infty} ka_k = 0$. ∎

Teorema 15 (Critério da condensação de Cauchy generalizado)**.** *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos e decrescente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Se $p \geq 2$ é um número inteiro, então*

$$\sum a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum p^n a_{p^n} \text{ converge.}$$

Teorema 16. *Considere duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reais positivos. Se existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_o \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

então

(*i*) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$ converge;*

(*ii*) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$ diverge;*

Corolário 1. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos tais que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)}, \ n \to \infty, a \in \mathbb{R},$$

então se $a > 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se $a < 1$ a série diverge. Além disso , se $a = 1$ nada se pode concluir a respeito da convergência da série.

Teorema 17 (Critério de Abel)**.** *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais. Se para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $a_n = \alpha_n \cdot b_n$, onde*

(*i*) *A sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constituida de termos positivos, decrescente e $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;*

(*ii*) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é limitada*

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Teorema 18 (Critério da equidistribuição de Weyl)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, periódica e de período irracional. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n}$ converge, então f é identicamente nula.*

Exemplo 4.13. *Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{n}$ é divergente.*

Solução. A contra-positiva do teorema acima, assegura que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, periódica e de período irracional, tem-se que

$$f \text{ não identicamente nula} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n} \text{ é divergente.}$$

Diante do exposto, considerando a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x)$ é uma função contínua, periódica e de período irracional e não é identicamente nula, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{n}$ é divergente. ∎

5 Séries comutativamente convergentes

Definição 5.1 (Séries comutativamente convergentes)**.** *Um série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita* **comutativamenta convergente** *se para toda bijeção $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ é convergente.*

Teorema 19. *Toda série de números reais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente, é comutativamente convergente. Além disso, para toda bijeção $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

6 Produto de Cauchy

Definição 6.1 (Produto de Cauchy)**.** *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de numeros reais. A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ tal que $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ é chamada de* **produto de Cauchy** *das duas séries dadas.*

O principal resultado referente ao produto de Cauchy de duas séries de números reais é o seguinte teorema.

Teorema 20. *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries convergentes de numeros reais. Então o produto de Cauchy dessas duas séries, isto é, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *tal que* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ *também é convergente e além disso,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

7 Séries duplas

Nesta seção final apresentaremos as séries duplas, isto é, séries numéricas da da forma $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^2} a_{p,q}$. Para esse tipo de série o resultado de maior destaque é o teorema a seguir.

Teorema 21 (Teorema de Fubini)**.** *Seja* $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *uma sequência de números reais bi-indexada. As seguintes afirmaçõessão equivalentes:*

(i) Para todo $q \in \mathbb{N}$*, a série* $\sum_{p=1}^{\infty} a_{p,q}$ *é absolutamente convergente e* $\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} |a_{p,q}|\right)$ *converge.*

(ii) Para todo $p \in \mathbb{N}$*, a série* $\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q}$ *é absolutamente convergente e* $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty} |a_{p,q}|\right)$ *converge.*

Além disso, nas condições acima, ocorre a seguinte igualdade

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} |a_{p,q}|\right) = \sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty} |a_{p,q}|\right).$$

8 Problemas propostos

1. (a) Mostre que para n suficientemente grande, tem-se que $\sum_{k=1}^{n} k! \simeq n!$.
   (b) Estude a congergência da série cujo termo geral é dado por $a_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} k!$.

2. Considere a sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ definida por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$.
   (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\frac{f_{n-1}f_{n+2}}{f_n^2 . f_{n+1}^2} = \frac{1}{f_n^2} - \frac{1}{f_{n+1}^2}$.
   (c) Mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{n-1}f_{n+2}}{f_n^2 . f_{n+1}^2}$ é convergente.

3. Identifique se as séries a seguir são convergentes ou divergentes:
   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$.
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.
   (c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^2}$.
   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(2n^2-3n+1)(\log n + (\log n)^2)}$.

4. (a) Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1-(-1)^N x^n}{1+x} dx.$
   (b) Conclua que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (série harmônica alternada).

5. (MIT)Calcule $\sum_{n=2}^{17} \frac{n^2+n+1}{n^4+2n^3-n^2-2n}$.

6. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de números reais positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.
   (a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} n.a_n = 0$.
   (b) Estude a convergência da série cujo termo geral é dado por $b_n = a_n(1+a_n)^n$.

7. (MIT)Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$, onde $\cos\theta = \frac{1}{5}$.

8. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\pi\sqrt{n^2+1})$ é convergente?

9. (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ é convergente.
   (b) Mostre que a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ é irracional?

10. Mostre que para $n \geq 2$,

$$\sum_{\substack{p\leq n \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p} > ln(ln(n)) - 1.$$

Conclua, a partir daí que a soma dos inversos dos primos diverge.

11. (École Centrale - França) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$,onde

$$a_n = (-1)^n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

12. (MIT)Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$.

13. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx$.

14. (a) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ é convergente.

    (b) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

15. (MIT)Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{cotg}^{-1}(n^2+n+1)$.

16. (Prépas-França)

    (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, resolva a equação $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1}$, onde $i^2 = -1$ e $z \in \mathbb{C}$.

    (b) Demonstre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

    (c) Demonstre que $\forall u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $^2u < \frac{1}{u^2} < 1 + \operatorname{cotg}^2 u$.

    (d) Conclua que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

17. (Prépas-França)Qual a soma da série abaixo?
$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2n}{n^4+n^2+2}.$$

18. (Prépas-França)Qual a soma da série abaixo?
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+8n^2+17n+10}.$$

19. (MIT)Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{n} - \operatorname{arctg}\sqrt{n+1}\right)$.

20. Considere a sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ definida por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

    (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $f_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\phi^n - \phi^{-n}\right)$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

    (b) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ é convergente.

21. (OBMU-2019) Qual o resultado da seguinte soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$.

22. (OBMU-2023)Seja $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$, $\forall n \geq 1$.

    (a) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge pra todo $x \in (-4, 4)$ e que a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ satisfaz a equação diferencial $x(x-4)f'(x) + (x+2)f(x) = -x$.

    (b) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

23. (OBMU-2022) Dados $c, \alpha > 0$, considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = c$ e $x_{n+1} = x_n e^{-x_n^{\alpha}}$ para $n \geq 1$. Para quais valores reais de β a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\beta}$ é convergente?

24. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a série de números reais tal que
$$a_n = \ln(n^2+n+1) + a\ln(n^2+2n+4) + b\ln(n^2+3n+10).$$
Mostre que essa série é convergente se, e somente se $a = -2$ e $b = 1$.

25. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $b_n = 1 - \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}$, o que se pode afirmas sobre a convergência (ou não) da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

26. Com relação a serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{x^4+2x^2+2}\right)^n$, podemos afirmar que:

    (a) é divergente.

    (b) é convergente e tem soma 2.

    (c) é convergente e tem soma $\frac{5}{3}$.

    (d) é convergente e tem soma $\frac{\pi}{2}$.

    (e) é convergente e tem soma ≤ 1.

27. Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, responda os itens a seguir:

    (a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$.

    (b) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

28. (IMC-1995)Seja $(b_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais positivos tais que $b_0 = 1$ e $B_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1+\sqrt{b_{n-1}}}$. Calcule
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n.$$

29. (IMC-1996)Seja $a_1 = 1, A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ para $n \geq 2$. Mostre que:
    (a) $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 2^{-1/2}$.
    (b) $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > \dfrac{2}{3}$.

30. (IMC-1997)Supondo que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, as somas abaixo comvergem?
    (a) $a_1 + a + 2 + a + 4 + a + 3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + \cdots + a_9 + a_{32} + \cdots$.
    (b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + \cdots$.

31. (IMC-1997) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sen}(\log n)}{n^\alpha}$ converge, se $\alpha > 0$.

32. (IMC-1998)Seja $F : (0,1) \to [0,\infty)$ que é nula, exceto nos pontos $a_1, a_2, \ldots$. Seja $b_n = f(a_n)$.
    (a) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, então f é diferenciável em pelo menos um ponto $x \in (0,1)$.
    (b) Prove que para qualquer sequencia de números reais não negativos $(b_n)_{n\geq 1}$, tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, existe uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que a função f como acima não é diferenciável em nenhum ponto.

33. (IMC-1999)Existe uma bijação $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty$?

34. (IMC-2012)Defina a sequência $a_0, a_1, \ldots$ indutivamente por $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$ e
$$a_{n+1} = \frac{n a_n^2}{1 + (n-1)a_n}, \text{ para } n \geq 1.$$
Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ converge e determine a sua soma.

35. (IMC-2013)Existe uma sequência de números complexos tal que para todo inteiro positivo p tem-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ converge se e somente se p não é um número primo?

36. (IMC-2014)Considere a seguinte sequência
$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1 \ldots).$$
Determine todos os pares (α, β) de números reais positivos tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}}{n^\alpha} = \beta$.

37. (IMC-2024)Para um inteiro positivo x, denote o n-ésimo dígito decimal de x é denotado por $d_n(x) \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$e $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)10^{n-1}$. Suponha que para alguma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ há apenas um número finito de zeros na sequência e $(d_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Prove que existem infinitos inteiros positivos que não ocorrem na sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

38. (IMC-2025) Seja $F(0) = 0, F(1) = \frac{3}{2}$, e $F(n) = \frac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$ para $n \geq 2$. Detemrine se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$ é um número racional ou não.

39. (IMC-2015) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2$.

40. (IMC-2016)Seja $(x_1, x_2, \ldots)$ uma sequência de números reais positivos satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$. Prove que
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leq 2.$$

41. (IMC-2018)Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ duas sequência de números reais positivos. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:
    (a) Existe uma sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tais que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ ambas comvergem.
    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge.

42. (IMC-2018)Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números reais tal que $a_0 = 0$ e
$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$
Prove que a seguinte série é convergente
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

43. (Número de Liouville)
    (a) Seja $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que existe um polinômio $p \in \mathbb{Z}[X]$, de grau n, tal que $p(\alpha) = 0$. Demonstre que existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que
$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}.$$
    (b) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números inteiros, limitada e não nula. Sendo $\ell = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!}$, mostre que ℓ é transcendente, isto é, não existe um polinônio $p \in \mathbb{Z}[X]$, não nulo, tal que $p(\ell) = 0$.

44. (IMC-2019)Seja $C = \{4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$ o conjunto dos inteiros positivos compostos. Para cada $n \in C$ seja a_n o menor inteiro positivo k tal que $k!$ é divisível por n. Determine quando a série $\displaystyle\sum_{n\in C}\left(\frac{a_n}{n}\right)^n$ converge.

45. Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a sequência dos dos números reais positivos que são soluções da equação $\tan x = x$. O que pode-se dizer sobre a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$?

46. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{2^n} = \ln 2$, onde ζ é a **função zeta de Riemann**: $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^s}$.

47. Prove que para qualquer sequência estritamente crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos a soma da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n_k}}{n_k!}$ é irracional.

48. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais definida por $a_1 = \sqrt{2}$ e

$$a_n = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ raízes}}},\ n \geq 2.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge?

49. Para $\gamma \geq 0$, estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}$.

50. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\,\mathrm{sen}(na)}{n}$ é comvergente para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

51. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

é o produto de Cauchy da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ por ela mesma, e determine a sua soma.

52. (Indiana Math competition) Dado $a > 0$ e $x_0 > 0$, mostre que existe uma e apenas uma sequência de números reais positivos $(x_k)_{k\geq 0}$ tal que

$$x_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^a,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$

53. (Indiana Math competition) Determine duas sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ de números reais positivos tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \text{ mas } \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

onde $c_n = \min\{a_n, b_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

54. (Indiana Math competition)Considerando que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, onde $a_n > 0$ e $a_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1 - a_n}$$

converge?(Prove ou dê um contra-exemplo).

55. (Indiana Math competition)Examine a validade da seguinte conjectura:

A série de termos positivos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se, e somente se, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge.

56. (Indiana Math competition) Mostre que

$$-\frac{\pi}{2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a^2 + n^2} < \frac{\pi}{2}.$$

57. (Indiana Math competition) Use o fato de que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge para obter uma prova de que existem infinitos números primos $p_1, p_2, \ldots$. Sugestão: para cada iteiro N existe um inteiro r tal que

$$\frac{1}{p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_N^{a_N}} + \frac{1}{p_1^{b_1}p_2^{b_2}\ldots p_N^{b_N}} + \cdots + \frac{1}{p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdots p_N^{c_N}}$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots + \frac{1}{p_1^r}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_2^r}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_N} + \frac{1}{p_N^2} + \cdots + \frac{1}{p_N^r}\right)$$

58. (Indiana Math competition) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma seuência de números reais positivos. Se Existe uma sequência $(b_n)_{n\geq 0}$ de números reais positivos e uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \alpha,$$

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

59. (Indiana Math competition)Avalie o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2 + ni + j}}.$$

60. (Indiana Math competition) A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln k)}{k}$ converge ou diverge?

61. (Indiana Math competition)Determine se

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{6+\cdots}}}}}}$$

converge ou diverge.

62. (Indiana Math competition)A sequência de Fibonacci F_k é definida por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{k+2} = F_{k+1}+F_k$ para $k \geq 0$. É bem conhecifo (e podemos assumir como verdade!) que F_k é o inteiro mais perto de $\frac{\tau^k}{\sqrt{5}}$, onde $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mostre que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k F_k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{k!}\right) = \frac{2}{5}(1-\cosh\sqrt{5}).$$

63. (Indiana Math competition)A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n}$ converge ou diverge?

64. (Indiana Math competition) Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos estitamente positivos, e

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ diverge.

65. (Indiana Math competition) A série

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

converge ou diverge? Justifique!

66. (Indiana Math competition)
    (a) Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ converge.
    (b) Determine o valor para o qual essa série converge.

67. (Indiana Math competition)Determine o limite da sequência definida por

$$a_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+kn).$$

68. (Indiana Math competition) Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

Sugestão: pode ser útil lembar que

$$\operatorname{arctg}(\alpha) - \operatorname{arctg}(\beta) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right).$$

69. (Indiana Math competition) Defina a sequência $(x_n)_{n\geq 0}$ por $x_0 = 0, x_1 = 1$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}}{n}.$$

Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$. Sugestão: Lembrando que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad x \in (-1,1]$$

pode ser útil.

70. (Indiana Math competition)Mostre que para qualquer intereiro positivo k, o número $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^k}$ é irracional.

71. (Indiana Math competition) Considere a seguinte série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_n)^n$$

onde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ |\operatorname{sen} n \cos n| & , \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Faça um conjectura se a série acima converge ou não, e prove a sua conjectura.

72. (Indiana Math competition) Sejam $(s_n)_{n=1}^{\infty}, (t_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências com as seguintes propriedades:

- $(s_n)_{n=1}^{\infty}$é mpnótona decrscente;
- $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ é monótona crescente;
- $s_n \geq u_n \geq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada uma das três sequências $(s_n)_{n=1}^{\infty}, (t_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, conjecture se a seuência é convergente, divergente ou se as informações conhecidas não são suficientes para determinar aconvergência. Por fim, prove as suas conjecturas.

73. Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, \frac{1}{n})$ diverge.

74. Determine a parte inteira da soma $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. Análise real. Rio de Janeiro: Impa, 2004.

[2] GELCA, Razvan; Andreescu, Titu. Putnam and beyond. New York: Springer, 2007.

[3] DJUKIC, Duan et al. The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009 Second Edition. Springer New York, 2011.

[4] SOUZA, Paulo Ney. Silva, Jorge Nuno. Berkley Problems in Mathematics, Springer Verlag, 1998.

[5] FEUILLET, Christine; Selom, Isabelle. Algèbre-Geometrie 2° année - MP-MP*, Hachette Supérieur, 2004.

[6] www.obm.org.br