Estimativas para o número de Ramsey $R(3, k)$

Semana Olímpica 2024 - Bento Gonçalves - RS

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

1 Teorema de Erdös-Szekeres

Definição 1.1. O *número de Ramsey* $R(s, t)$ é menor $n \in \mathbb{N}$ tal que toda 2-coloração das arestas de K_n com as cores azul e vermelha contém uma cópia azul de K_s ou uma cópia vermelha de K_t. Em particular, escrevemos $R(k, k) = R(k)$.

Em 1935, Erdös e Szekeres apresentaram o seguinte resultado para o número de Ramsey diagonal:

Teorema 1.2. (Erdös-Szekeres, 1935) Para todo $k \geq 1$, temos

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}.$$

Eles também provaram um resultado análogo para o número de Ramsey fora da diagonal:

Teorema 1.3. (Erdös-Szekeres, 1935) Para todos $s, t \geq 1$, temos

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Os resultados seguem por indução a partir da seguinte desigualdade:

Teorema 1.4. Seja $R(a, b)$ o número de Ramsey. Então

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Como corolário, obteve-se a primeira cota superior para $R(3, k)$:

Corolário 1.5. Para $k \geq 1$ temos

$$R(3, k) \leq \binom{k+1}{2}.$$

Observação: também podemos obter a cota superior quadrática por meio de um algoritmo guloso.

2 Método Probabilístico

Com o desenvolvimento do método probabilístico, inicialmente apresentado por Paul Erdös em 1947, avanços significativos foram realizados no problema de estimar $R(3,k)$.

2.1 Método da Alteração

O método da alteração é uma técnica dentro do método probabilístico. Em poucas palavras, nem sempre uma construção aleatória nos dá o exemplo que procuramos para resolver o problema. Mas pode ser que consigamos uma construção próxima do desejado. Então, podemos alterar de alguma maneira, por exemplo removendo vértices ou arestas, do exemplo obtido de modo a obter o exemplo com as propriedades desejadas.

Para demonstrar a nova cota para $R(3,k)$, o seguinte resultado é útil:

Teorema 2.6. Seja $p = p(n) \in (0,1)$. Então

$$\alpha(G(n,p)) \leq \frac{2\log n}{p}$$

com alta probabilidade.

Teorema 2.7. (Erdös, 1959) Existe $c > 0$ tal que

$$R(3,k) \geq \left(\frac{ck}{\log k}\right)^{3/2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

2.2 Desigualdade de Erdös-Tetali

Em 1961, Erdös apresentou a seguinte melhora

Teorema 2.8. (Erdös, 1961) Existe $c > 0$ tal que

$$R(3,k) \geq \frac{ck^2}{(\log k)^2}.$$

Em 1995, Krivelevich apresentou uma nova demonstração para este resultado, usando uma desigualdade provada por Erdös e Tetali em 1990:

Teorema 2.9. (Erdös-Tetali, 1990) Seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ um conjunto de eventos em algum espaço de probabilidade e, para todo $t \in \mathbb{N}$, denote por $\mathcal{E}_t$ o evento em que ocorrem todos os eventos de algum conjunto de t eventos independentes em $\mathcal{A}$. Então

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_t) \leq \frac{1}{t!}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\right)^t.$$

2.3 Lema Local de Lovász

Em 1977, Spencer encontrou uma prova do **teorema 2.8** usando o Lema Local de Lovász, desenvolvido por Lovász e Erdös em 1975.

Definição 2.10. Um *grafo de dependência* para uma coleção de eventos $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é um grafo G com conjunto de vértices $\mathcal{A}$ e com a seguinte propriedade: para cada $A_i \in \mathcal{A}$, os eventos em

$$\overline{N}_G(A_i) := V(G) \setminus N_G(A_i)$$

são mutuamente independentes.

Teorema 2.11. (Lema Local de Lovász) Seja G um grafo de dependência para um conjunto de eventos $\mathcal{A}$. Se

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{e(\Delta(G)+1)}$$

para cada $A \in \mathcal{A}$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c\right) > 0.$$

Teorema 2.12. (Lema Local de Lovász Assimétrico) Seja G o grafo de dependência dos eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Se existem números $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ tais que

$$\mathbb{P}(A_i) \leq x_i \prod_{ij \in E(G)} (1 - x_j)$$

para todo $i \in [n]$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) > 0.$$

3 Teorema de Ajtai, Komlós e Szemerédi

O próximo grande avanço se deu pela melhora no limitante superior de Erdös-Szekeres. Em 1980, Ajtai, Komlós e Szemerédi provaram o seguinte resultado:

Teorema 3.13. (Ajtai, Komlós e Szemerédi, 1980) Para k suficientemente grande temos

$$R(3,k) \leq \frac{8k^2}{\log k}.$$

O passo principal na prova é o seguinte teorema:

Teorema 3.14. (AKS, 1980) Se G é um grafo livre de triângulos com grau máximo d, então

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{8d} \log d.$$

Shearer apresentou uma demonstração belíssima para o teorema acima. Além disso, utilizando outro método, melhorou o resultado acima, trocando $\frac{1}{8}$ por $1 + o(1)$, obtendo assim a cota abaixo para $R(3, k)$:

Teorema 3.15. (Shearer, 1983) Para k suficientemente grande temos

$$R(3, k) \leq (1 + o(1))\frac{k^2}{\log k}.$$

4 Resultados mais recentes

Entre 1980 e 1983, outros matemáticos, como Griggs, melhoraram a constante na cota superior de $R(3, k)$, mas Shearer foi quem obteve a melhor cota, a qual permanece sendo a melhor que se conhece.

Quanto a cota inferior, em 1995 Kim fechou a ordem de grandeza do problema mostrando que a magnitude de $R(3, k)$ é de fato $k^2/\log k$:

Teorema 4.16. (Kim, 1995) Exite uma constante $c > 0$ tal que

$$R(3, k) \geq (c + o(1))\frac{k^2}{\log k},$$

quando $k \to \infty$.

Finalmente em 2020, Fiz Pontiveros, Griffths e Morris (e de forma independente Bohman e Keevash em 2021), ajustaram a constante acima para $\frac{1}{4}$, obtendo assim o melhor resultado conhecido. Eles utilizaram o chamado *triangle-free process*. Dessa forma, as melhores cotas conhecidas são:

Teorema 4.17. Para k suficientemente grande temos

$$\left(\frac{1}{4} + o(1)\right)\frac{k^2}{\log k} \leq R(3, k) \leq (1 + o(1))\frac{k^2}{\log k}.$$

5 Referências

[1] P. Erdős e G. Szekeres (1935). "A combinatorial problem in geometry". Compositio Math. 2, pp. 463–470. MR: 1556929 (ver pp. 68, 69, 79, 195).

[2] P. Erdős (1947). "Some remarks on the theory of graphs". Bulletin of the American Mathematical Society 53.4, pp. 292–294. MR: 0019911 (ver p. 70).

[3] P. Erdős (1959). "Graph theory and probability". Canad. J. Math. 11, 1959, 34–38 MR21 #876; Zentralblatt 84,396.

[4] P. Erdős, A. Rényi (1959). "On random graphs. I". Publ. Math. Debrecen 6, 1959, pp. 290–297 MR22 #10924; Zentralblatt 92,157.

[5] P. Erdős (1961). “Graph theory and probability. II”. Canadian Journal of Mathematics 13, pp. 346–352. MR: 0120168 (ver pp. 190, 212).

[6] P. Erdős e P. Tetali (1990). “Representations of integers as the sum of k terms”. Random Structures Algorithms 1.3, pp. 245–261. MR: 1099791 (ver p. 190).

[7] M. Krivelevich (1995). “Bounding Ramsey numbers through large deviation inequalities”. Random Structures & Algorithms 7.2, pp. 145–155. MR: 1369060 (ver p. 190).

[8] L. Lovász (1975). “Three short proofs in graph theory”. Journal of Combinatorial Theory, Series B 19.3, pp. 269–271. MR: 0396344 (ver p. 37).

[9] J. Spencer (1977). “Asymptotic lower bounds for Ramsey functions”. Discrete Math. 20.1, pp. 69–76. MR: 491337 (ver p. 212).

[10] M. Ajtai, J. Komlós e E. Szemerédi (1980). “A note on Ramsey numbers”. Journal of Combinatorial Theory, Series A 29.3, pp. 354–360. MR: 0600598 (ver p. 192).

[11] Jerrold R Griggs (1983). "An upper bound on the Ramsey numbers $R(3, k)$". Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 35, Issue 2, pp. 145-153, ISSN 0097-3165.

[12] J. H. Kim (1995). “The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$”. Random Structures Algorithms 7.3, pp. 173–207. MR: 1369063 (ver p. 194).

[13] G. Fiz Pontiveros, S. Griffiths e R. Morris (2020). “The triangle-free process and the Ramsey number $R(3, k)$”. Mem. Amer. Math. Soc. 263.1274, pp. v+125. MR: 4073152 (ver p. 194).

[14] T. Bohman e P. Keevash (2021). “Dynamic concentration of the triangle-free process”. Random Structures & Algorithms 58.2, pp. 221–293. MR: 4201797 (ver p. 194).