

# Racionalizando o Logotipo da OBM

Rafael Tupynambá Dutra

Nível Avançado

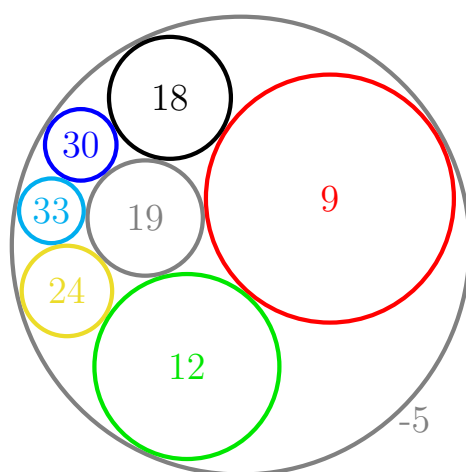


Figura 1: Versão do logotipo da OBM com uma corrente de 6 círculos. Os números representam a curvatura (inverso do raio) de cada círculo.

O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática consiste em uma corrente de Steiner de  $n$  círculos ( $n = 5$ ) coloridos, todos tangentes a um dado círculo interno e a um externo. Neste artigo, mostraremos que com  $n = 6$  (e, também, com  $n = 4$  ou  $n = 3$ , mas não com  $n = 5$ ), é possível obter figuras em que os raios de todos os círculos são racionais. Estudaremos algumas propriedades interessantes dessas construções no que diz respeito à álgebra, à geometria e até à teoria dos números. Por exemplo, na Figura 1, note que as somas das curvaturas de círculos opostos coincidem ( $9 + 33 = 12 + 30 = 18 + 24 = 3(19 - 5)$ ), as retas que passam pelos centros  $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$  e  $\overleftrightarrow{c_{12}c_{24}}$  são paralelas e os 6 círculos coloridos têm curvaturas múltiplas de 3. Por fim, mostraremos que essa construção se estende como um fractal, permitindo o empacotamento de infinitos círculos de curvaturas inteiras.

Obviamente, se encontrarmos uma corrente de Steiner em que os raios de todos os círculos são racionais, suas curvaturas também serão racionais e, multiplicando as curvaturas pelo denominador comum, obtemos uma versão em escala da figura com todas as curvaturas inteiras. É conveniente defi-

nir a curvatura do círculo externo com sinal negativo, simbolizando que o “interior” deste círculo é, na verdade, a parte exterior da figura, contendo o ponto do infinito. Dessa forma, os interiores de todos os 8 círculos na Figura 1 são disjuntos.

## 1 Propriedades Algébricas

Uma corrente de Steiner, como o logotipo da OBM, pode ser construída aplicando-se uma inversão a uma figura originalmente simétrica, como já detalhado em um artigo da 4ª edição da Revista Eureka! [1]. A Figura 2 mostra essa configuração original para uma corrente de 6 círculos. Para as equações, será conveniente trabalhar no plano complexo. Definindo a raiz sexta da unidade  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ , os 6 círculos da corrente são posicionados com centros em  $\omega^k$ , para  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Eles têm raio  $1/2$ , assim como o círculo interior, enquanto que o círculo exterior possui raio  $3/2$ . No caso geral, os raios dos  $n$  círculos da corrente são  $\text{sen } \frac{\pi}{n}$ , enquanto que o raio do círculo interno é  $1 - \text{sen } \frac{\pi}{n}$  e o do círculo externo  $1 + \text{sen } \frac{\pi}{n}$ .

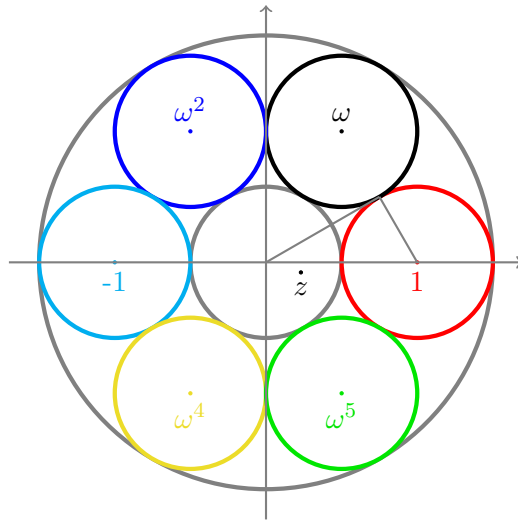


Figura 2: Disposição inicial simétrica de  $n = 6$  círculos. O centro de inversão  $z = \frac{3}{13} - \frac{1}{26}\sqrt{3}i$  foi utilizado para obter Figura 1.

Vamos posicionar o centro de inversão  $z$  no interior do círculo interno da Figura 2. Dessa forma, a inversão levará o círculo interno da Figura 2 no círculo externo da Figura 1, e vice-versa. Por exemplo, o centro de inversão  $z = \frac{3}{13} - \frac{1}{26}\sqrt{3}i$  permite a obtenção das curvaturas inteiras mostradas na Figura 1.

Para estudar a inversão de um círculo, considere a Figura 3. Ao aplicar

uma inversão de centro  $z$  e raio de inversão  $\rho$ , o ponto  $x$  é levado em  $x'$  que satisfaz  $|x' - z| = \frac{\rho^2}{|x - z|}$ . Da mesma forma,  $y$  é levado em  $y'$  que satisfaz  $|y' - z| = \frac{\rho^2}{|y - z|}$ . O raio do novo círculo  $r' = (|x' - z| - |y' - z|) / 2$  é então

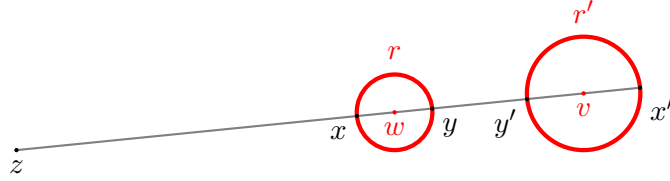


Figura 3: Inversão de um círculo.

$$r' = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{|z - w| - r} - \frac{\rho^2}{|z - w| + r} \right) = \frac{\rho^2 r}{|z - w|^2 - r^2} \quad (1)$$

Da mesma forma, podemos calcular a posição do centro do novo círculo  $v$  (que não é resultado da inversão do centro original  $w$ ). Uma homotetia de centro  $z$  e razão  $r'/r$  leva  $w$  em  $v$ , de forma que

$$v = z + \frac{r'}{r}(w - z) \quad (2)$$

Usando essas fórmulas, podemos obter os seguintes teoremas sobre a corrente de Steiner resultante. A notação  $S_n[a_e, a_i; b_0, \dots, b_{n-1}]$  é usada para se referir a uma corrente de Steiner cujos  $n$  círculos possuem curvaturas  $b_0, \dots, b_{n-1}$ , nesta ordem, sendo  $a_e$  e  $a_i$  as curvaturas dos círculos externo e interno. Em geral, cada corrente possui  $4n$  tais representações, já que podemos escolher o círculo inicial da corrente, o sentido de rotação na corrente e a ordem entre  $a_e$  e  $a_i$ .

**Teorema 1.** *(Correntes de Steiner de 6 círculos) Uma corrente de Steiner de 6 círculos com curvaturas dadas por  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  satisfaz:*

$$b_0 + b_3 = b_1 + b_4 = b_2 + b_5 \quad (3)$$

$$b_0 + b_2 + b_4 = b_1 + b_3 + b_5 \quad (4)$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 9(a_e + a_i) \quad (5)$$

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = \frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i \quad (6)$$

*Demonstração.* Como todas as equações a serem provadas são homogêneas, podemos assumir sem perda de generalidade que o raio de inversão é  $\rho = 1$ . As curvaturas podem ser diretamente calculadas invertendo a equação (1).

Para o círculo externo, usamos  $w = 0$  e  $r = 1/2$ , obtendo

$$a_e = 2|z|^2 - \frac{1}{2}$$

Note que escolhemos um ponto  $z$  interior ao círculo interno, de modo que  $|z| < 1/2$  e a equação para  $a_e$  satisfaz a convenção  $a_e < 0$ . Vamos a seguir calcular as outras curvaturas em função do valor de  $a_e$ . Para o círculo interno, usamos  $w = 0$  e  $r = 3/2$ , para obter

$$a_i = -\frac{2}{3}|z|^2 + \frac{3}{2} = \frac{4 - a_e}{3}$$

Aqui, tivemos que realizar uma mudança de sinal, já que  $|z| < 3/2$ , mas a curvatura do círculo interno  $a_i$  precisa ser positiva.

Para os 6 círculos restantes, utilizamos  $w = \omega^k$  e  $r = 1/2$ , de forma que

$$b_k = 2 \left| z - \omega^k \right|^2 - \frac{1}{2} = 2 \left( z - \omega^k \right) \left( \bar{z} - \bar{\omega}^k \right) - \frac{1}{2}$$

Usando  $z\bar{z} = |z|^2$  e  $\omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1$ , obtemos

$$b_k = a_e + 2 - 2 \left( \bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z} \right) \quad (7)$$

Para obter as equações (3) e (5), basta usar  $\omega^k + \omega^{k+3} = 0$  para calcular

$$b_k + b_{k+3} = 2a_e + 4 = 3(a_e + a_i)$$

Analogamente, usando  $\omega^k + \omega^{k+2} + \omega^{k+4} = 0$ , a equação (4) segue. Resta provar a equação (6). Temos

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 = \sum_{k=0}^5 \left( (a_e + 2)^2 - 4(a_e + 2) \left( \bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z} \right) + 4 \left( \bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z} \right)^2 \right)$$

Como  $\sum_{k=0}^5 \omega^k = 0$ , o termo do meio é nulo. E como  $\sum_{k=0}^5 \omega^{2k} = 0$ , o último termo se reduz a

$$\sum_{k=0}^5 4 \left( \bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z} \right)^2 = 6 \cdot 8|z|^2 = 24a_e + 12$$

Assim, temos

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 = 6(a_e + 2)^2 + 24a_e + 12 = 6a_e^2 + 48a_e + 36$$

Por outro lado, o lado direito da equação (6) vale

$$9(a_e + 2)^2 + 3a_e(4 - a_e) = 6a_e^2 + 48a_e + 36$$

□

Note que, se fixarmos as curvaturas  $a_e$  e  $a_i$  dos círculos externo e interno, as equações (3)-(6) são 5 equações envolvendo as 6 variáveis  $b_0, \dots, b_5$ . Assim, há apenas 1 grau de liberdade restante para determinar essas 6 curvaturas. Intuitivamente, isso faz sentido, uma vez que fixados os círculos externo e interno, a posição de um círculo na corrente determina a posição dos demais. Perceba que, mesmo sem fixar  $a_e$  e  $a_i$ , as equações (3) e (4) já impõem 3 condições sobre as 6 variáveis  $b_0, \dots, b_5$ , restando apenas 3 graus de liberdade para escolhê-las.

É possível demonstrar que a fórmula equivalente à equação (5) para correntes com  $n = 5$  círculos é

$$\frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{5} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{a_e + a_i}{2} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \frac{a_e + a_i}{2}$$

o que imediatamente implica que no caso  $n = 5$  não há soluções em que as 7 curvaturas sejam inteiras. Na verdade, algo mais forte pode ser provado.

**Exercício 1.** *Mostre que na corrente  $S_5[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ , as 5 curvaturas  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  só podem ser todas racionais se elas forem iguais.*

Talvez ainda mais surpreendente que as equações apresentadas no Teorema 1 seja o fato de que elas continuam válidas quando as curvaturas são substituídas pelos produtos entre curvatura e o número complexo que representa o centro de cada círculo.

**Teorema 2.** *(Correntes de Steiner de 6 círculos: centros) Uma corrente de Steiner  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  cujos centros dos círculos são dados por  $z_e, z_i; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  no plano complexo satisfaz:*

$$b_0z_0 + b_3z_3 = b_1z_1 + b_4z_4 = b_2z_2 + b_5z_5 \quad (8)$$

$$b_0z_0 + b_2z_2 + b_4z_4 = b_1z_1 + b_3z_3 + b_5z_5 \quad (9)$$

$$b_0z_0 + b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 + b_4z_4 + b_5z_5 = 9(a_éz_e + a_iz_i) \quad (10)$$

$$b_0^2z_0^2 + b_1^2z_1^2 + b_2^2z_2^2 + b_3^2z_3^2 + b_4^2z_4^2 + b_5^2z_5^2 = \frac{81}{4}(a_éz_e + a_iz_i)^2 + 9a_ea_iz_éz_i \quad (11)$$

*Demonstração.* A equação (2) pode ser escrita como

$$\frac{1}{r'}v = \frac{1}{r'}z + \frac{1}{r}(w - z)$$

A partir dela, podemos calcular os produtos para o círculo externo

$$a_e z_e = (a_e - 2)z$$

e para o círculo interno

$$a_i z_i = \left(a_i + \frac{2}{3}\right)z$$

Para os círculos da corrente, temos

$$b_k z_k = b_k z + 2(\omega^k - z)$$

de forma que

$$b_k z_k + b_{k+3} z_{k+3} = 3(a_e + a_i)z - 4z = 3(a_e z_e + a_i z_i)$$

Isso demonstra as equações (8) e (10). Similarmente, para demonstrar (9), fazemos

$$b_k z_k + b_{k+2} z_{k+2} + b_{k+4} z_{k+4} = \frac{9}{2}(a_e + a_i)z - 6z = \frac{9}{2}(a_e z_e + a_i z_i)$$

Resta demonstrar (11). Temos

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 z_k^2 = \sum_{k=0}^5 \left(b_k^2 z^2 - 4b_k \omega^k z + 4z^2\right)$$

A partir de (7), é possível mostrar que

$$\sum_{k=0}^5 b_k \omega^k = -\frac{12z}{\rho^2} = -3(3a_i + a_e)z$$

de forma que

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 z_k^2 = \left(\frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i - 36(a_e + a_i) - 12(3a_i + a_e) + 24\right) z^2$$

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 z_k^2 = \left(\frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i - 48a_e - 72a_i + 24\right) z^2$$

Já o lado direito de (11) é igual a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{81}{4}\left(a_e - 2 + a_i + \frac{2}{3}\right)^2 + 9(a_e - 2)\left(a_i + \frac{2}{3}\right)\right) z^2 \\ & = \left(\frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i - 48a_e - 72a_i + 24\right) z^2 \end{aligned}$$

□

## 2 Propriedades Geométricas

Vamos agora usar as propriedades fornecidas pelos Teoremas 1 e 2 para inferir aspectos geométricos da corrente mostrada na Figura 1. A Figura 4 mostra uma versão rotacionada da mesma corrente, com escala ajustada de forma que o círculo externo seja unitário.

Essa figura tem muitas propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, representando por  $c_m$  o centro do círculo de curvatura  $m$ , temos que as retas  $\overleftrightarrow{c_{-5}c_{12}}$  e  $\overleftrightarrow{c_{30}c_{33}}$  são paralelas, assim como o par de retas  $\overleftrightarrow{c_{-5}c_9}$  e  $\overleftrightarrow{c_{18}c_{30}}$ , e também o trio de retas  $\overleftrightarrow{c_{-5}c_{30}}$ ,  $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$  e  $\overleftrightarrow{c_{12}c_{24}}$ . Interessantemente, o paralelismo das retas  $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$  e  $\overleftrightarrow{c_{12}c_{24}}$  decorre diretamente do fato de que esses dois pares de círculos vizinhos apresentam razão 2 entre eles:  $18/9 = 24/12 = 2$ . Surpreendentemente, outras propriedades geométricas de interesse também decorrem desse fato, como mostraremos no Teorema 4.

**Definição 3.** Uma corrente de Steiner de 6 círculos é chamada **pareada** se puder ser representada como  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  com  $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5} = 2$ .

Na verdade, usando as equações (3) e (4), encontramos condições suficientes mais fracas para que uma corrente seja pareada.

**Exercício 2.** Mostre que se uma corrente  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  satisfaz  $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5}$  com  $b_0 \neq b_5$ , ela é pareada.

**Exercício 3.** Mostre que se uma corrente  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  satisfaz  $\frac{b_1}{b_0} = 2$ , ela é pareada.

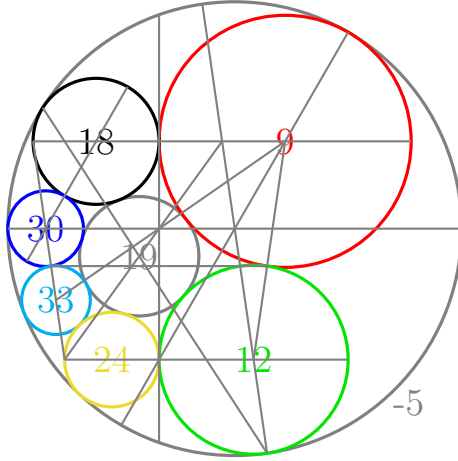


Figura 4: Versão rotacionada da Figura 1, onde os centros dos círculos são dados por  $c_{-5} = 0$ ,  $c_{19} = -\frac{8}{19} - \frac{4}{57}\sqrt{3}i$ ,  $c_9 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{3}i$ ,  $c_{18} = -\frac{11}{18} + \frac{2}{9}\sqrt{3}i$ ,  $c_{30} = -\frac{5}{6}$ ,  $c_{33} = -\frac{26}{33} - \frac{2}{11}\sqrt{3}i$ ,  $c_{24} = -\frac{13}{24} - \frac{1}{3}\sqrt{3}i$ ,  $c_{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\sqrt{3}i$ .

**Teorema 4.** (*Correntes pareadas*) Uma corrente de Steiner de 6 círculos  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  pareada com  $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5} = 2$  cujos círculos são chamados  $C_e, C_i; C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  com centros  $z_e, z_i; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  satisfaz as seguintes propriedades geométricas:

1. A reta  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e a reta  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$  são paralelas.
2. O ponto de tangência  $T_{0,1}$  entre  $C_0$  e  $C_1$  e o ponto de tangência  $T_{4,5}$  entre  $C_4$  e  $C_5$  formam uma reta  $\overleftrightarrow{T_{0,1}T_{4,5}}$  perpendicular às retas  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$  e, portanto, tangente aos 4 círculos.
3. A reta  $\overleftrightarrow{T_{5,0}T_{2,3}}$  definida analogamente é paralela às retas  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ .
4. Sendo  $P_1$  o outro ponto de interseção da reta  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  com  $C_1$  e  $P_4$  o outro ponto de interseção da reta  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$  com  $C_4$ , a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_4}$  contém os centros  $z_2$  e  $z_3$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos provar que se uma inversão leva um círculo da corrente em outro, essa inversão necessariamente preserva o círculo interno e o círculo externo tangente a ambos. Tal inversão precisa estar centrada no centro homotético externo  $E$  dos dois círculos (vide Figura 5).

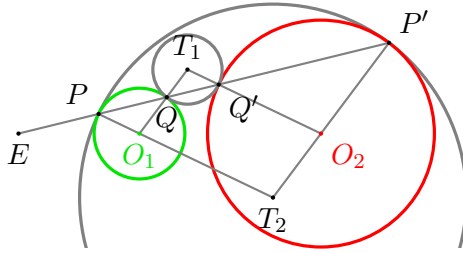


Figura 5: Inversão de centro  $E$  transforma  $P \leftrightarrow P'$  e  $Q \leftrightarrow Q'$ .

Imagine que traçamos uma reta qualquer pelo ponto  $E$ , que intersecta os dois círculos nos pontos  $P, Q, Q'$  e  $P'$ . Existe uma inversão de centro  $E$  que leva  $P$  em  $P'$  e  $Q$  em  $Q'$  (pares anti-homólogos). E existe uma homotetia de centro  $E$  que leva  $P$  em  $Q'$  e  $Q$  em  $P'$  (pares homólogos).

Os triângulos  $PO_1Q$  e  $Q'O_2P'$  são isósceles (raios) e semelhantes, já que a homotetia leva um no outro. Logo, as retas  $\overleftrightarrow{PO_1}$  e  $\overleftrightarrow{P'O_2}$  se encontram em um ponto  $T_2$  tal que o triângulo  $PT_2P'$  é isósceles. Assim, existe um círculo centrado em  $T_2$  que tangencia os dois círculos nos pontos  $P$  e  $P'$ . O mesmo argumento prova que existe um outro círculo tangente aos dois círculos originais em  $Q$  e  $Q'$ . Como a inversão transforma  $P \leftrightarrow P'$  e  $Q \leftrightarrow Q'$  e preserva tangências, concluímos que a inversão precisa preservar o círculo interno e o externo.



Aplicamos essa conclusão ao teorema da seguinte forma. Seja  $E$  o centro homotético externo<sup>1</sup> dos círculos  $C_0$  e  $C_5$  (vide Figura 6). A inversão  $I_E$  de centro  $E$  que transforma  $C_0 \leftrightarrow C_5$  é tal que  $C_e \leftrightarrow C_e$  e  $C_i \leftrightarrow C_i$ . Mas, fixando-se os círculos externo e interno, a posição de um círculo da corrente determina as posições dos outros. Logo,  $I_E$  transforma  $C_1 \leftrightarrow C_4$  e  $C_2 \leftrightarrow C_3$ . Assim, o ponto  $E$  também é o ponto homotético externo dos círculos  $C_1$  e  $C_4$ . Dessa forma, uma homotetia  $H_E$  de centro  $E$  e razão  $\frac{b_5}{b_0} = \frac{b_4}{b_1}$  leva  $C_5$  em  $C_0$  e  $C_4$  em  $C_1$ , o que implica que as retas  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$  são paralelas.

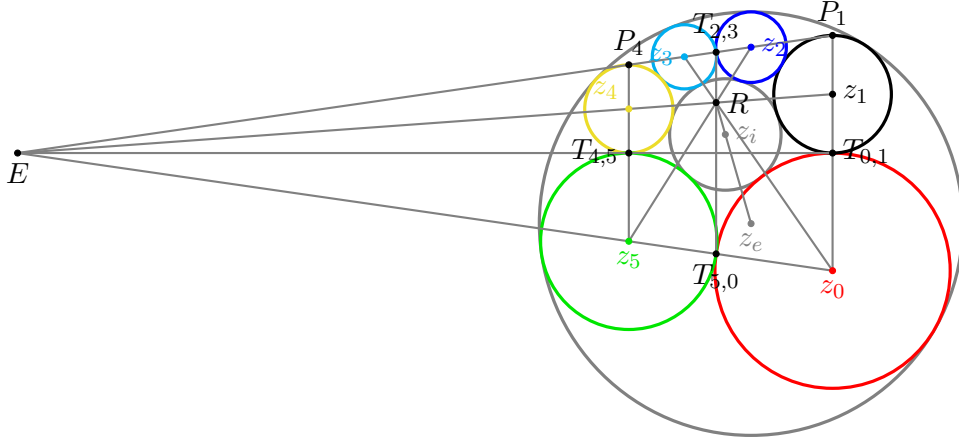


Figura 6: Uma inversão  $I_E$  de centro  $E$  transforma  $C_e \leftrightarrow C_e$ ,  $C_i \leftrightarrow C_i$ ,  $C_0 \leftrightarrow C_5$ ,  $C_1 \leftrightarrow C_4$  e  $C_2 \leftrightarrow C_3$ . Uma inversão negativa  $I_R$  de centro  $R$  transforma  $C_i \leftrightarrow C_e$ ,  $C_0 \leftrightarrow C_3$ ,  $C_1 \leftrightarrow C_4$  e  $C_2 \leftrightarrow C_5$ .

Agora note que tanto a homotetia  $H_E$  quanto a inversão  $I_E$  precisam levar o ponto de tangência  $T_{4,5}$  no ponto de tangência  $T_{0,1}$ . Mas a homotetia leva um ponto de um círculo em seu par homólogo, enquanto que a inversão leva em seu par anti-homólogo, de forma que elas só podem coincidir nos pontos de tangência. Assim, a reta que passa por  $E$ ,  $T_{4,5}$  e  $T_{0,1}$  precisa tangenciar os 4 círculos, sendo perpendicular às retas  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ .

Agora, usamos as equações (3), (5), (8) e (10) para definir o ponto  $R$  como

$$R = \frac{b_0z_0 + b_3z_3}{b_0 + b_3} = \frac{b_1z_1 + b_4z_4}{b_1 + b_4} = \frac{b_2z_2 + b_5z_5}{b_2 + b_5} = \frac{a_ez_e + a_iz_i}{a_e + a_i}$$

Esse ponto  $R$  é, por definição, o centro homotético interno dos pares  $(C_0, C_3)$ ,  $(C_1, C_4)$  e  $(C_2, C_5)$ . Três homotetias de centro  $R$  e razão negativa  $-\frac{b_0}{b_3}$ ,  $-\frac{b_1}{b_4}$  ou  $-\frac{b_2}{b_5}$  podem ser usadas para levar  $C_0$  em  $C_3$ ,  $C_1$  em  $C_4$ , ou  $C_2$  em  $C_5$ , respectivamente. Enquanto que uma homotetia de centro  $R$  e razão positiva  $-\frac{a_i}{a_e}$  leva  $C_i$  em  $C_e$ .

<sup>1</sup>Assumimos aqui  $b_0 \neq b_5$ . O caso  $b_0 = b_5$  precisa ser tratado separadamente.

Além disso, existe uma “inversão negativa” (inversão composta com reflexão)  $I_R$  de centro  $R$  que transforma  $C_i \leftrightarrow C_e$ . A inversão negativa  $I_R$  precisa levar a corrente de 6 círculos em uma outra corrente de 6 círculos, sendo que as retas que unem seus centros ao ponto  $R$  precisam ser preservadas. A única possibilidade é que a inversão negativa  $I_R$  transforma  $C_0 \leftrightarrow C_3$ ,  $C_1 \leftrightarrow C_4$ ,  $C_2 \leftrightarrow C_5$ .

Agora note que uma homotetia de centro  $R$  e razão  $-\frac{b_1}{b_4}$  leva  $C_1$  em  $C_4$ , enquanto que uma homotetia de centro  $T_{5,0}$  com a mesma razão negativa  $-\frac{b_0}{b_5} = -\frac{b_1}{b_4}$  leva  $C_0$  em  $C_5$ . Assim, a reta  $\overleftrightarrow{RT_{5,0}}$  precisa ser paralela às retas  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ . Mas a inversão negativa  $I_R$  leva  $T_{5,0}$  em  $T_{2,3}$ . Logo, a reta  $\overleftrightarrow{T_{5,0}T_{2,3}}$  é paralela às retas  $\overleftrightarrow{z_0z_1}$  e  $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ .

A seguir, usamos o fato de que a inversão  $I_E$  mantém fixos  $T_{5,0} \leftrightarrow T_{5,0}$  e  $T_{2,3} \leftrightarrow T_{2,3}$  para concluir que esses dois pontos estão à mesma distância de  $E$  e, portanto, à mesma distância da reta  $\overleftrightarrow{T_{0,1}T_{4,5}}$ , que é perpendicular a  $\overleftrightarrow{T_{5,0}T_{2,3}}$  e passa por  $E$ . Por fim, note que, como  $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5} = 2$ ,  $T_{0,1}$  é o ponto médio entre  $z_0$  e  $P_1$  e, similarmente,  $T_{4,5}$  é o ponto médio entre  $z_5$  e  $P_4$ . Assim, a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_4}$  é a reflexão da reta  $\overleftrightarrow{z_0z_5}$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{T_{0,1}T_{4,5}}$  e, portanto, contém o ponto  $T_{2,3}$  e o ponto  $E$ . Como a inversão  $I_E$  transforma  $C_2 \leftrightarrow C_3$ , concluímos que essa reta  $\overleftrightarrow{P_1P_4}$  contém também os centros  $z_2$  e  $z_3$ .  $\square$

### 3 Propriedades Numéricas

Agora vamos estudar o problema de encontrar correntes de Steiner de 6 círculos  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  com todas as curvaturas inteiras. Para tanto, procuramos soluções inteiras para as equações (3), (4), (5) e (6). Como  $b_0 + b_2 + b_4 = \frac{9}{2}(a_e + a_i)$ , precisamos ter  $a_e + a_i \equiv 0 \pmod{2}$ . Além disso, temos o seguinte resultado sobre as curvaturas módulo 3.

**Teorema 5.** (Módulo 3) *Uma corrente de Steiner  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  em que todas as 8 curvaturas são inteiras precisa satisfazer  $b_0 \equiv b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4 \equiv b_5 \equiv 0 \pmod{3}$ .*

*Demonstração.* A equação (6) exige que

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 \equiv 0 \pmod{9} \quad (12)$$

Além disso, pelas equações (4) e (5), precisamos ter

$$b_0 + b_2 + b_4 = b_1 + b_3 + b_5 \equiv 0 \pmod{9} \quad (13)$$

e, pelas equações (3) e (5), precisamos ter

$$b_0 + b_3 = b_1 + b_4 = b_2 + b_5 \equiv 0 \pmod{3} \quad (14)$$

Provaremos que essas condições só podem ser satisfeitas se todos os  $b_k$  forem múltiplos de 3. Por (14), sabemos que  $b_0^2 + b_3^2$  só pode ser congruente a 0 ou 2 módulo 3. Analogamente para  $b_1^2 + b_4^2$  e  $b_2^2 + b_5^2$ . Por (12), precisamos ter todos os  $b_k^2$  congruentes a 0 módulo 3 ou todos os  $b_k^2$  congruentes a 1 módulo 3.

Suponha, por absurdo, que exista uma solução em que os  $b_k$  não são todos múltiplos de 3. Então nenhum deles pode ser múltiplo de 3. Por (13), descobrimos que precisamos ter  $b_0 \equiv b_2 \equiv b_4 \pmod{3}$  e  $b_1 \equiv b_3 \equiv b_5 \pmod{3}$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir  $b_0 \equiv b_2 \equiv b_4 \equiv 1 \pmod{3}$  e  $b_1 \equiv b_3 \equiv b_5 \equiv -1 \pmod{3}$ .

Escrevendo  $b_0 = 3u_0 + 1$ ,  $b_2 = 3u_2 + 1$ ,  $b_4 = 3u_4 + 1$ ,  $b_1 = 3u_1 - 1$ ,  $b_3 = 3u_3 - 1$ ,  $b_5 = 3u_5 - 1$ , a equação (13) nos diz que

$$u_0 + u_2 + u_4 + 1 = u_1 + u_3 + u_5 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

enquanto que a equação (12) nos dá

$$-u_0 - u_2 - u_4 + u_1 + u_3 + u_5 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

Absurdo: logo, todos os  $b_k$  têm que ser múltiplos de 3.  $\square$

Por (5), a média aritmética dos  $b_k$  vale  $\frac{3}{2}(a_e + a_i)$ , que é um número inteiro e múltiplo de 3. Chamando essa média de  $3c$  e usando as equações (3) e (4), podemos escrever  $b_0 = 3(c-d-e)$ ,  $b_1 = 3(c-e)$ ,  $b_2 = 3(c+d)$ ,  $b_3 = 3(c+d+e)$ ,  $b_4 = 3(c+e)$ ,  $b_5 = 3(c-d)$ , para certos inteiros  $d$  e  $e$ . Com essa representação, as equações (3) e (4) são automaticamente satisfeitas.

As equações (5) e (6) podem ser combinadas em uma única equação quadrática na variável  $a$ , cujas soluções são  $a_e$  e  $a_i$ . Temos

$$\begin{aligned} a_e + a_i &= \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{9} = 2c \\ a_e a_i &= \frac{b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2}{9} - \frac{(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)^2}{36} \\ a_e a_i &= 6c^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4de - 9c^2 = -3c^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4de \end{aligned}$$

Assim, a equação

$$a^2 - 2ca - 3c^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4de = 0$$

tem soluções  $a \in \{a_e, a_i\}$ . O discriminante da equação é

$$\Delta = 16(c^2 - d^2 - e^2 - de)$$

então, para termos soluções inteiras,  $c^2 - d^2 - e^2 - de$  precisa ser um quadrado perfeito. Procurando soluções com todos os  $b_k$  positivos, a primeira solução é a trivial  $c = 1$ ,  $d = e = 0$ , que gera a corrente  $S_6[-1, 3; 3, 3, 3, 3, 3, 3]$  (Configuração simétrica como a da Figura 2).

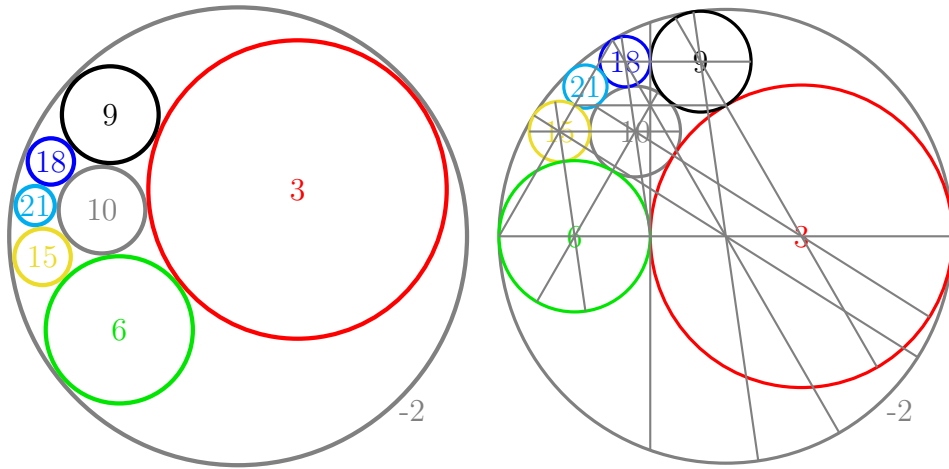


Figura 7: A corrente de Steiner  $S_6[-2, 10; 3, 6, 15, 21, 18, 9]$  mostrada à esquerda como resultado de uma inversão de centro  $z = \frac{9}{28} - \frac{1}{28}\sqrt{3}i$  e à direita com coordenadas  $c_{-2} = 0$ ,  $c_{10} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{15}\sqrt{3}i$ ,  $c_3 = \frac{1}{3}$ ,  $c_6 = -\frac{2}{3}$ ,  $c_{15} = -\frac{11}{15} + \frac{4}{15}\sqrt{3}i$ ,  $c_{21} = -\frac{13}{21} + \frac{8}{21}\sqrt{3}i$ ,  $c_{18} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\sqrt{3}i$ ,  $c_9 = -\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\sqrt{3}i$ .

A primeira solução após a trivial ocorre com  $c = 4$ ,  $d = 1$ ,  $e = 2$  e se trata da corrente  $S_6[-2, 10; 3, 6, 15, 21, 18, 9]$ , mostrada na Figura 7. Essa também é uma corrente pareada ( $6/3 = 18/9 = 2$ ), então muitas de suas propriedades geométricas já estão descritas pelo Teorema 4.

Essa corrente também tem mais propriedades interessantes. Primeiramente, vemos que os centros  $c_{-2}$ ,  $c_3$  e  $c_6$  são colineares ( $1/2 = 1/3 + 1/6$ ). Além dos círculos pareados  $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$ , também a reta  $\overleftrightarrow{c_{10}c_{15}}$  é paralela à reta  $\overleftrightarrow{c_3c_6}$ . Além disso, temos paralelismos entre  $\overleftrightarrow{c_{-2}c_9}$ ,  $\overleftrightarrow{c_{10}c_{18}}$  e  $\overleftrightarrow{c_6c_{15}}$ , entre  $\overleftrightarrow{c_{-2}c_{18}}$  e  $\overleftrightarrow{c_3c_9}$ , entre  $\overleftrightarrow{c_{-2}c_{15}}$  e  $\overleftrightarrow{c_3c_{10}}$  e entre  $\overleftrightarrow{c_6c_{10}}$  e  $\overleftrightarrow{c_{15}c_{21}}$ .

A corrente  $S_6[-5, 19; 9, 12, 24, 33, 30, 18]$  das Figuras 1 e 4 é a segunda menor solução não-simétrica, que pode ser obtida com  $c = 7$ ,  $d = 1$ ,  $e = 3$ .

**Exercício 4.** (Correntes de Steiner de 4 círculos) Mostre que uma corrente de Steiner de 4 círculos com curvaturas dadas por  $S_4[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3]$  satisfaz:

$$b_0 + b_2 = b_1 + b_3 \quad (15)$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 2(a_e + a_i) \quad (16)$$

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{3}{2}(a_e + a_i)^2 + 2a_e a_i \quad (17)$$

**Exercício 5.** Mostre que uma corrente de Steiner  $S_n[a_e, a_i; b_0, \dots, b_{n-1}]$  com  $n$  círculos só pode ter todas as  $n + 2$  curvaturas inteiras se  $n \in \{3, 4, 6\}$ .

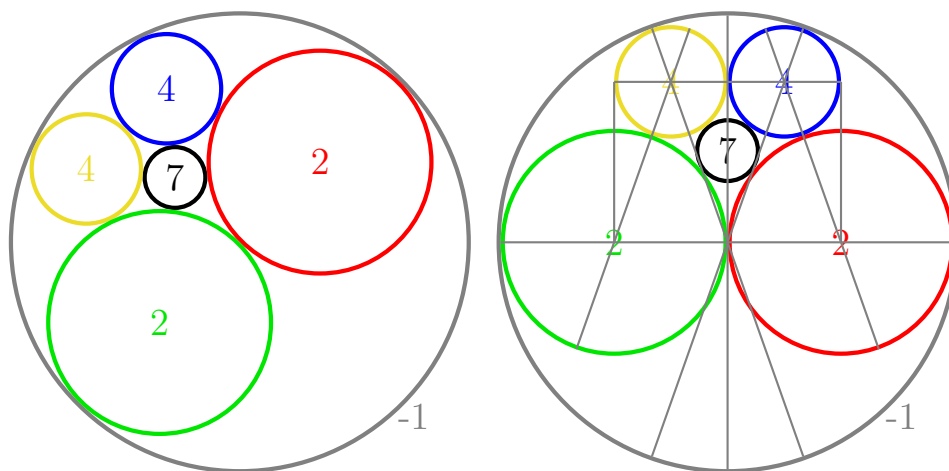


Figura 8: A corrente de Steiner  $S_4[-1, 7; 2, 2, 4, 4]$  mostrada à esquerda como resultado de uma inversão de centro  $z = \frac{(3-2\sqrt{2})(1-i)}{2}$  e à direita com coordenadas  $c_{-1} = 0$ ,  $c_2 = \pm\frac{1}{2}$ ,  $c_4 = \pm\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ ,  $c_7 = \frac{2}{7}\sqrt{2}i$ .

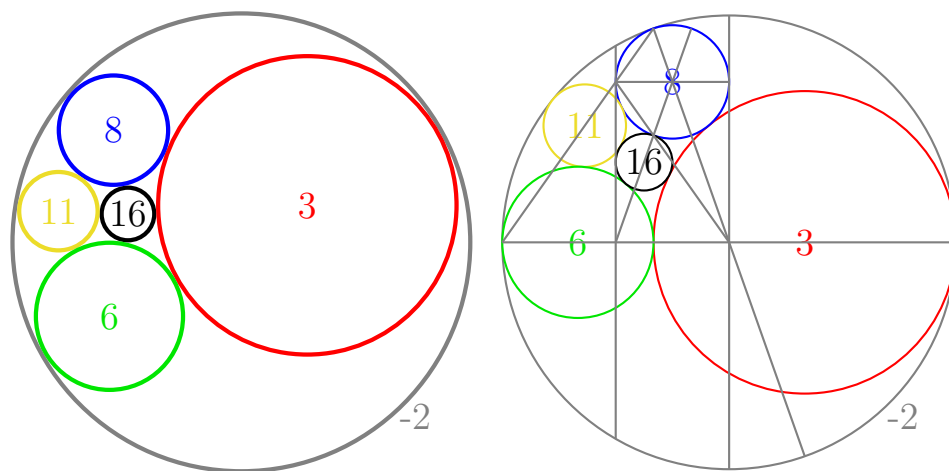


Figura 9: A corrente de Steiner  $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$  mostrada à esquerda como resultado de uma inversão de centro  $z = \frac{(19-12\sqrt{2})(11-5i)}{146}$  e à direita com coordenadas  $c_{-2} = 0$ ,  $c_{16} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{2}i$ ,  $c_3 = \frac{1}{3}$ ,  $c_6 = -\frac{2}{3}$ ,  $c_{11} = -\frac{7}{11} + \frac{4}{11}\sqrt{2}i$ ,  $c_8 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ .

Para  $n = 4$ , a menor solução inteira é a corrente  $S_4[-1, 7; 2, 2, 4, 4]$  mostrada na Figura 8. Já a solução  $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$  mostrada na Figura 9 é a menor solução não-simétrica. Ambas apresentam círculos diametralmente opostos ( $1/1 = 1/2 + 1/2$ ,  $1/2 = 1/3 + 1/6$ ), além de círculos vizinhos com

razão 2 ( $4/2 = 2$ ,  $6/3 = 2$ ), mas aqui isso não implica as propriedades geométricas como no caso  $n = 6$ .

Uma propriedade interessante das correntes com  $n = 4$  é que nelas cada um dos 6 círculos é tangente a exatamente 4 círculos vizinhos, então todos os círculos desempenham o mesmo papel. A corrente da Figura 9, por exemplo, poderia ser igualmente denominada  $S_4[3, 11; -2, 6, 16, 8]$  ou  $S_4[6, 8; -2, 3, 16, 11]$ .

## 4 Empacotamentos de Apolônio

A seguir, mostraremos que uma corrente de Steiner com curvaturas inteiras, como a  $S_6[-5, 19; 9, 12, 24, 33, 30, 18]$  das Figuras 1 e 4, pode ser usada para construir um empacotamento de círculos de Apolônio como o da Figura 10, onde todos os infinitos círculos possuem curvaturas inteiras.

A construção se dá da seguinte forma. A partir de uma corrente inicial  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ , construímos uma nova corrente de 6 círculos  $S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5]$  que possui em comum o círculo externo  $C_e$  e dois círculos vizinhos da corrente  $C_0$  e  $C_1$ , mas agora com um novo círculo interno  $C'_i$  e uma nova continuação de 4 círculos  $C'_2, C'_3, C'_4, C'_5$ . Assim, por exemplo, preservando o círculo externo ( $-5$ ) e dois círculos vizinhos (9 e 12) na Figura 10, obtemos uma nova corrente  $S_6[-5, 27; 9, 12, 36, 57, 54, 30]$  com novo círculo interno (27), que também pode ser vista na mesma figura.

Também é possível preservar o círculo interno e procurar por uma corrente com um novo círculo “externo”. Por exemplo, preservando o círculo interno (19) e os mesmos dois vizinhos (9 e 12), podemos obter uma nova corrente  $S_6[19, 99; 9, 12, 180, 345, 342, 174]$ , que é um tipo de corrente em que todos os círculos têm curvaturas positivas e, portanto, não possui um círculo “externo” no sentido usual. Geometricamente, os 5 novos círculos encontram-se dentro da região delimitada pelos três círculos originais.

Esse procedimento pode ser repetido infinitas vezes, dando origem ao fractal da Figura 10. Mostraremos a seguir como obter as curvaturas e centros dos novos círculos.

**Teorema 6.** *(Corrente conjugada) Dada uma corrente de Steiner de 6 círculos com curvaturas  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  é possível construir uma nova corrente  $S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5]$  que tem os círculos  $C_e, C_0$  e  $C_1$  em comum. Além disso, se a corrente original tinha todas as curvaturas inteiras, a nova corrente também terá.*

*Demonstração.* Para encontrar a nova corrente, a ideia é escrever as equações (3), (4), (5) e (6) somente em termos das curvaturas que serão preservadas ( $a_e, b_0$  e  $b_1$ ) e da curvatura interna  $a_i$ . A partir das equações (3), (4) e (5), podemos escrever

$$b_2 = \frac{3}{2}(a_e + a_i) - b_0 + b_1 \quad (18)$$



$$b_3 = 3(a_e + a_i) - b_0 \quad (19)$$

$$b_4 = 3(a_e + a_i) - b_1 \quad (20)$$

$$b_5 = \frac{3}{2}(a_e + a_i) + b_0 - b_1 \quad (21)$$

Substituindo em (6), obtemos

$$\frac{45}{2}(a_e + a_i)^2 - 6(a_e + a_i)(b_0 + b_1) + 4(b_0^2 + b_1^2 - b_0b_1) = \frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_ea_i$$

$$\frac{9}{4}(a_e - a_i)^2 - 6(a_e + a_i)(b_0 + b_1) + 4(b_0^2 + b_1^2 - b_0b_1) = 0$$

Se as curvaturas originais forem inteiras,  $b_0$  e  $b_1$  são múltiplos de 3. Então temos a seguinte equação de segundo grau com coeficientes inteiros em  $a_i$ :

$$a_i^2 - \left(2a_e + \frac{8}{3}(b_0 + b_1)\right) a_i + a_e^2 - \frac{8}{3}(b_0 + b_1)a_e + \frac{16}{9}(b_0^2 + b_1^2 - b_0b_1) = 0$$

Essa equação possui duas raízes inteiras: o primeiro valor já conhecido de  $a_i$  e um segundo valor  $a'_i$  que pode ser calculado como

$$a'_i = 2a_e + \frac{8}{3}(b_0 + b_1) - a_i \quad (22)$$

Uma vez conhecido o novo valor de  $a_i$ , as equações (18), (19), (20) e (21) podem ser usadas para calcular os novos valores de  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$  e  $b_5$ :

$$b'_2 = \frac{3}{2}(a_e + a'_i) - b_0 + b_1 \quad (23)$$

$$b'_3 = 3(a_e + a'_i) - b_0 \quad (24)$$

$$b'_4 = 3(a_e + a'_i) - b_1 \quad (25)$$

$$b'_5 = \frac{3}{2}(a_e + a'_i) + b_0 - b_1 \quad (26)$$

Pelo Teorema 2, todas as equações se mantêm válidas quando substituimos as curvaturas pelos produtos entre curvatura e o centro do círculo, de forma que as equações (22), (23), (24), (25) e (26) nos dão

$$a'_iz'_i = 2a_ez_e + \frac{8}{3}(b_0z_0 + b_1z_1) - a_iz_i \quad (27)$$

$$b'_2z'_2 = \frac{3}{2}(a_ez_e + a'_iz'_i) - b_0z_0 + b_1z_1 \quad (28)$$

$$b'_3z'_3 = 3(a_ez_e + a'_iz'_i) - b_0z_0 \quad (29)$$

$$b'_4z'_4 = 3(a_ez_e + a'_iz'_i) - b_1z_1 \quad (30)$$



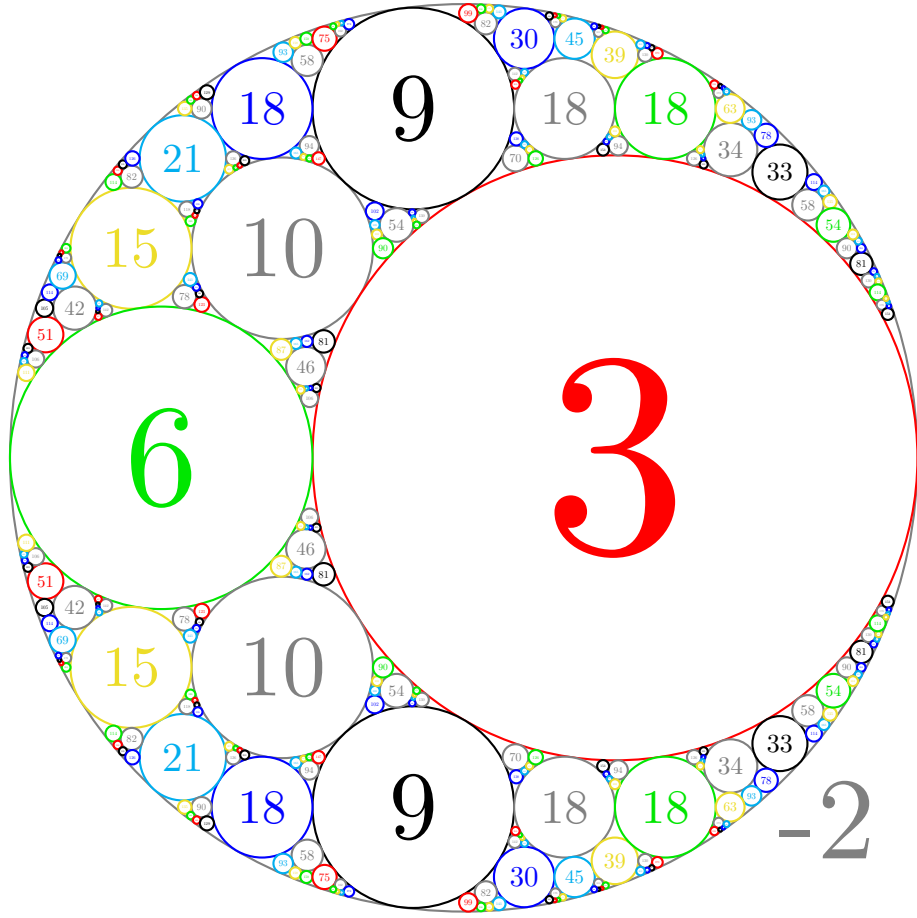


Figura 11: Empacotamento de Apolônio baseado em uma corrente de Steiner de 6 círculos  $S_6[-2, 10; 3, 6, 15, 21, 18, 9]$ .

$$b'_5 z'_5 = \frac{3}{2}(a_e z_e + a'_i z'_i) + b_0 z_0 - b_1 z_1 \quad (31)$$

As equações (22)-(31) nos dão um procedimento direto para calcular as curvaturas e os centros dos novos círculos, permitindo a construção de desenhos como o das Figuras 10 e 11.  $\square$

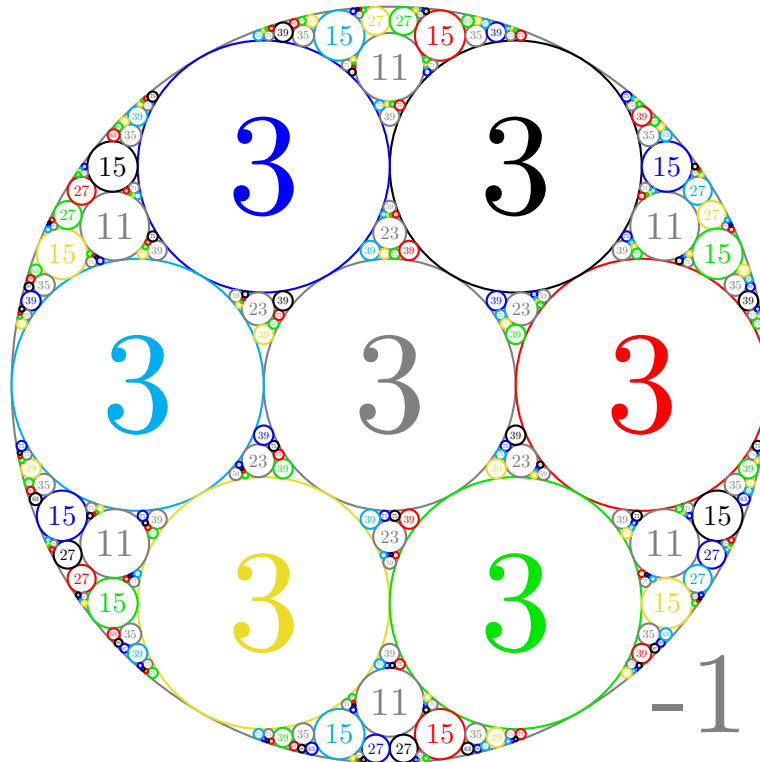
Note que, quando um par de vizinhos satisfaz  $\frac{b_1}{b_0} = 2$ , tanto a corrente original quanto a corrente conjugada  $S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5]$  são pareadas. Assim, é possível ver várias correntes pareadas nas Figuras 10 e 11.

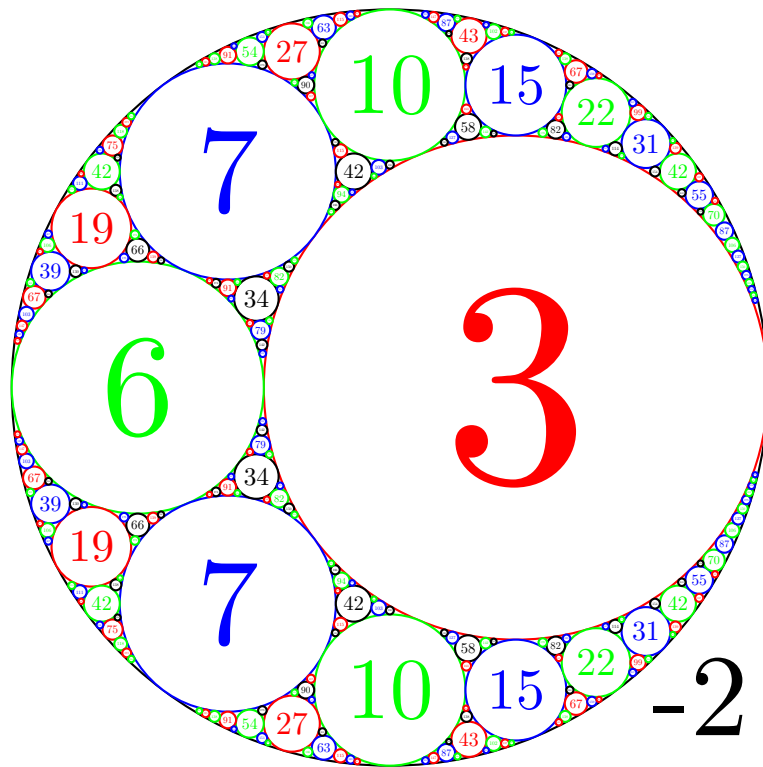
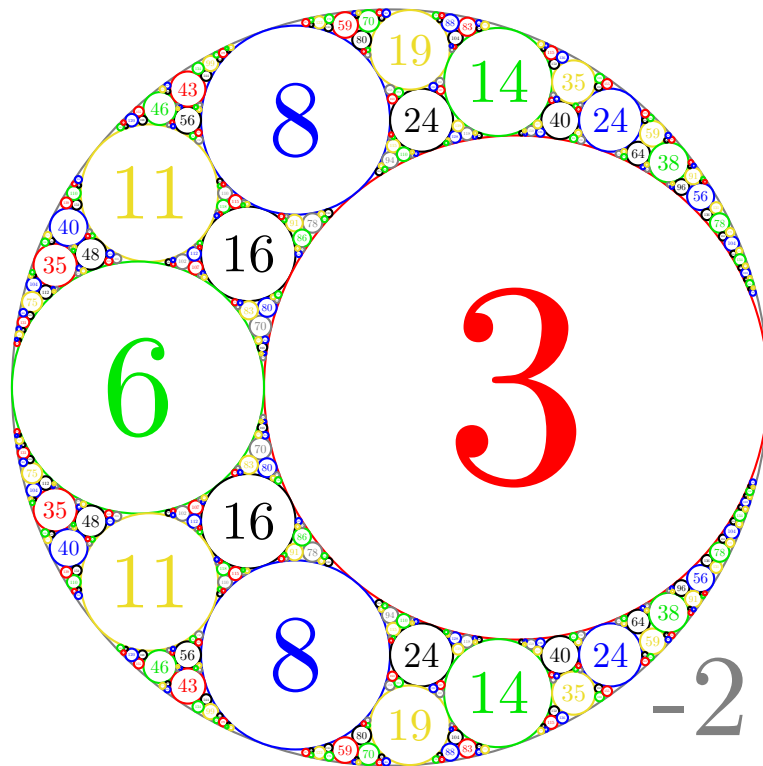
**Exercício 6.** Estude as correntes  $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  que satisfazem  $\frac{b_2}{b_0} = 2$  e  $\frac{b_4}{b_5} = \frac{3}{2}$ . Mostre que as retas que unem os centros dos círculos de razão 2 e  $\frac{3}{2}$  são paralelas. Um exemplo pode ser visto na corrente  $S_6[-2, 18; 9, 3, 18, 39, 45, 30]$  da Figura 11.

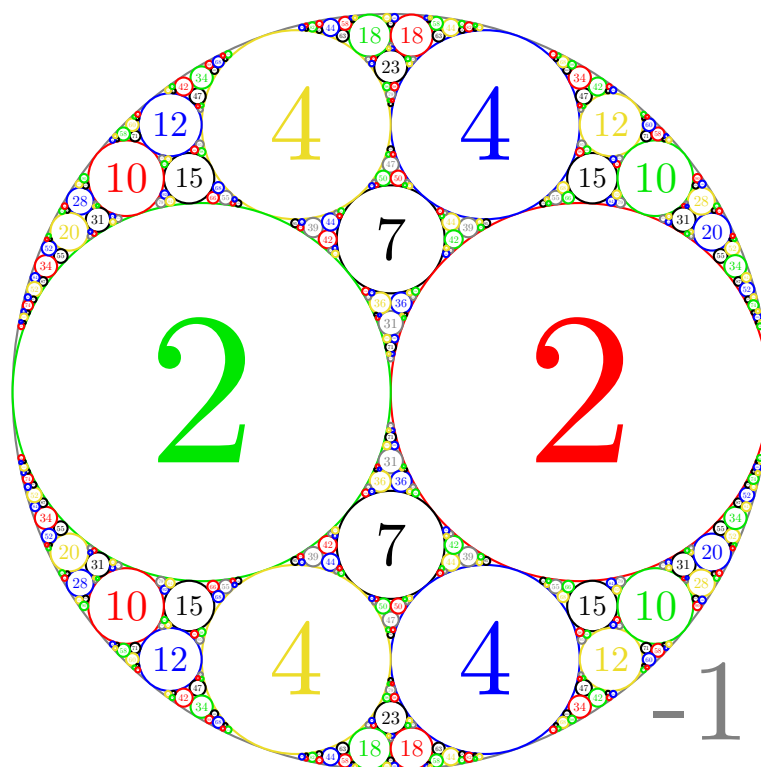
Ao final do artigo, mostramos mais 4 exemplos de empacotamentos de Apolônio, baseados nas seguintes correntes de Steiner:

- $S_6[-1, 3; 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ , a corrente totalmente simétrica
- $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$ , a corrente da Figura 9
- $S_3[-2, 34; 3, 6, 7]$ , uma corrente de 3 círculos
- $S_4[-1, 7; 2, 2, 4, 4]$ , a corrente da Figura 8

Note que mostramos 3 exemplos de empacotamentos contendo as curvaturas  $-2$ ,  $3$  e  $6$ : um com  $n = 6$ , um com  $n = 4$  e um com  $n = 3$ . Os empacotamentos com  $n = 3$  são bem conhecidos na literatura matemática, sendo chamados simplesmente de empacotamentos de círculos de Apolônio inteiros. Os empacotamentos com  $n = 4$  já foram chamados de empacotamentos de 3-círculos de Apolônio inteiros [5]. Isso porque podem ser construídos adicionando-se 3 círculos de cada vez. Por exemplo, no caso de  $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$ , podemos começar com os 3 círculos  $-2$ ,  $3$ ,  $6$ , depois adicionar  $8$ ,  $11$ ,  $16$ , depois adicionar  $14$ ,  $19$ ,  $24$ , etc.







## Referências

- [1] Paulo Cezar Pinto Carvalho. O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática. *Revista Eureka!*, 4:42–46, 1999.
- [2] Gerhard Guettler and Colin Mallows. A generalization of Apollonian packing of circles. *Journal of Combinatorics*, 1(1):1–27, 2010.
- [3] Jeffrey C Lagarias, Colin L Mallows, and Allan R Wilks. Beyond the Descartes circle theorem. *The American mathematical monthly*, 109(4):338–361, 2002.
- [4] Richard Evan Schwartz and Serge Tabachnikov. Descartes circle theorem, Steiner porism, and spherical designs. *The American Mathematical Monthly*, 127(3):238–248, 2020.
- [5] Xin Zhang. On the local-global principle for integral Apollonian 3-circle packings. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2018(737):71–110, 2018.