Combinatória e Polinômios - NU
Semana Olímpica 2024

Samuel Feitosa

Exercício 1. Sejam F um corpo, $f \in F[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ um polinômio e S_1, S_2, ..., S_n subconjuntos não vazios de F.

a) Se $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$ para todo $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, e $g_i(X_i) = \prod_{s \in S_i}(X_i - s)$, então

$$f = g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots + g_n h_n,$$

em que $deg(h_i) \leq deg(f) - deg(g_i)$.

b) Se $deg(f) = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, em que t_i são inteiros não negativos tais que $t_i < |S_i|$ e se o coeficiente de $X_1^{t_1} X_2^{t_2} \ldots X_n^{t_n}$ é não nulo, então existe $s_i \in S_i$ tal que $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) \neq 0$.

Exercício 2. (Teorema de Chevalley-Warning) Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ polinômios em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ tais que $\sum deg(f_i) < n$. Então a cardinalidade do conjunto de soluções $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ tais que $f_i(x) = 0$ para todo i é um múltiplo de p.

Exercício 3. (Teorema de Erdos-Ginzburg-Ziv) Prove que de qualquer conjunto de $2n - 1$ inteiros positivos podemos escolher n cuja soma é um múltiplo de n.

Exercício 4. (Cauchy-Davenport) Se p é um número primo, A e B são suconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}_p$, então

$$|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}.$$

Exercício 5. (IMO 2007) Seja n um inteiro positivo. Considere

$$S = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

como um conjunto de $(n+1)^3 - 1$ pontos no espaço tridimensional. Determine o menor número possível de planos, que não passem pela origem, mas de modo que a união deles contenha o conjunto S.

Exercício 6. Seja p um número primo e sejam S_1, S_2, ..., S_k conjuntos de inteiros não negativos, cada um contendo o 0 e tendo elementos distintos módulo p. Suponha que que $\sum_i (|S_i| - 1) \geq p$. Prove que para quaisquer elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_p$, a equação

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \equiv 0$$

tem solução não trivial com $x_i \in S_i$ para todo i.

Exercício 7. Seja p um primo e $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_p$ não necessariamente distintos. Prove que para quaisquer elementos distintos $b_1, b_2, \ldots, b_k$ de $\mathbb{Z}_p$, existe uma permutação σ tal que

$$a_1 + b_{\sigma(1)}, a_2 + b_{\sigma(2)}, \ldots, a_k + b_{\sigma(k)}$$

são distintos 2 a 2.

Exercício 8. (IMO 1993) Existem n lâmpadas numeradas como $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ em um círculo ($n > 1$), em que denotamos $L_{n+k} = L_k$. (Uma lâmpada a qualquer momento está ligada ou desligada) Realize os passos $s_0, s_1, \ldots$ como segue: no passo s_i, se L_{i-1} está ligada, mude L_i de ligada para desligada e vice-versa, caso contrário, não faça nada. Inicialmente todas as lâmpadas estão ligadas. Mostre que:

a) Existe um inteiro positivo $M(n)$ tal que após $M(n)$ passos todas as lâmpadas estarão ligadas novamente;

b) Se $n = 2k$, temos $M(n) = n^2 - 1$;

c) Se $n = 2k + 1$, podemos tomar $M(n) = n^2 - n + 1$.

Exercício 9. (Martin Gardner 1976/ Scientific American) Dizemos que uma distribuição de rainhas em um tabuleiro de xadrez é *boa* se não existem 3 delas em uma mesma linha, coluna ou diagonal (retas com inclinação ± 1). No desenho abaixo, temos uma distribuição *boa* em um tabuleiro 8×8. Seja $m_3(n)$ o maior número de rainhas que podem ser colocadas em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ formando uma distribuição *boa*, mas com a propriedade de que qualquer acréscimo de uma rainha em uma casa vazia remove essa propriedade. Mostre que $m_3(n) \geq n$.