$(3^3)^a$ **Semana Olímpica**

Problemas de Combinatória em Olimpíadas Universitárias de Matemática

Thiago DK

▸ **PROBLEMA 1**

(Putman 2020) Sejam k e n inteiros com $1 \leq k < n$. Alice e Bob jogam um jogo com k pinos em uma linha de n buracos. No início do jogo, os pinos ocupam os k buracos mais à esquerda. Uma jogada válida consiste em mover um único pino para qualquer buraco vago que esteja mais à direita. Os jogadores alternam as jogadas, com Alice jogando primeiro. Perde o jogador que sem seu turno não puder fazer uma jogada válida. Para quais valores de n e k Alice tem uma estratégia vencedora?

▸ **PROBLEMA 2**

(ICMC 2023) Seja $\mathcal{G}$ um grafo simples com n vértices e m arestas tais que dois ciclos distintos nunca compartilham arestas. Prove que $2m < 3n$.

▸ **PROBLEMA 3**

(OCM 2011) Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos e não-vazios. Defina a função

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}|}.$$

Prove que f é não-decrescente, para o qual $|A|$ denota o número de elementos de A.

▸ **PROBLEMA 4**

(OBM 2021) Nós definimos recursivamente *pares bacanas* de palavras no alfabeto $\{a, b\}$ da seguinte forma:

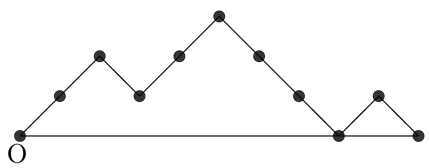
- (a, b) é um par bacana;
- $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$ é um par bacana se e somente se existe um par bacana (u, v) tal que $(\alpha, \beta) = (uv, v)$ ou $(\alpha, \beta) = (u, uv)$.

Dizemos que uma palavra $c_1 c_2 \cdots c_n$, com $c_j \in \{a, b\}$ é um *palíndromo* se $c_j = c_{n+1-j}$, $\forall j \leq n$.
Prove que se (α, β) é um par bacaba então existe um palíndromo γ (possivelmente vazio) tal que $\alpha\beta = a\gamma b$.

Observação: : Convencionamos que a palavra vazia (com 0 letras) é um palíndromo. Dadas palavras u=$a_1 a_2 \cdots a_k$ e $v = b_1 b_2 \cdots b_r$, com $a_i, b_j \in \{a, b\}$, $\forall i, j$, uv denota a concatenação de u e v, ou seja, $uv = a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_r$

▸ **PROBLEMA 5**

(Putman 2003) Um $n-$caminho *sobe-e-desce* é um caminho no reticulado $\mathbb{Z}^2$ com n subidas $(1, 1)$ e n descidas $(1, -1)$ que começa na origem O e não possui vértices abaixo do eixo x. Um *retorno* é uma sequência máxima de passos para baixo contíguos que termina no eixo x. Por exemplo, o caminho sobre-e-desce de comprimento 10 abaixo possui dois retornos, de comprimento 3 e 1, respectivamente. Mostre que existe uma correspondência biunívoca entre os n-caminhos sobe-e-desce sem retornos de comprimento par e os $(n-1)-$caminhos sobe-e-desce.



▸ **PROBLEMA 6**

(ICM 2020) Seja n um inteiro positivo. Calcule o número de palavras w que satisfazem as seguintes três propriedades.

1. w consiste em n letras do alfabeto $\{a, b, c, d\}$.
2. w contém um número par de letras a's.
3. w contém um número par de letras b's.

Por exemplo, para $n = 2$, existem 6 palavras que atendem a essas condições: aa, bb, cc, dd, cd, dc.

▸ **PROBLEMA 7**

(Putman 2003) Para um conjunto S de interiso não-negativos, $r_S(n)$ denota o número de pares ordenados (s_1, s_2) tais que $s_1 \in S$, $s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, e $s_1 + s_2 = n$. É possível particionar os inteiros não-negativos A e B de modo que $r_A(n) = r_B(n)$ para todo n?

▸ **PROBLEMA 8**

(Putman 2012) Um torneio entre $2n$ equipes durou $2n - 1$ dias, da seguinte maneira: Em cada dia, cada equipe jogou exatamente uma partida contra outra equipe, com uma equipe vencendo e uma equipe perdendo em cada uma das n partidas. Ao longo do torneio, cada equipe jogou contra todas as outras exatamente uma vez. Pode-se necessariamente escolher uma equipe vencedora de cada dia sem escolher nenhuma equipe mais de uma vez?

▸ **PROBLEMA 9**

(OBM 2023) Um cavalo bêbado se move em um tabuleiro infinito cujas casas são numeradas por pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Em cada movimento, as 8 possibilidades

$$(a, b) \to (a \pm 1, b \pm 2),$$
$$(a, b) \to (a \pm 2, b \pm 1)$$

são igualmente prováveis. Sabendo que o cavalo sai de $(0, 0)$, calcule a probabilidade de que, após 2023 movimentos, ele esteja em uma casa (a, b) com $a \equiv 4 \pmod 8$ e $b \equiv 5 \pmod 8$.

▸ **PROBLEMA 10**

(IMC 2022) Nós colorimos todos os lados e diagonais de um polígono regular P com 43 vértices de vermelho ou de azul, de tal maneira que cada vértice é uma extremidade de 20 segmentos vermelhos e 22 segmentos azuis. Um triângulo formado pelos vértices de P é chamado monocromático se todos os seus lados tiverem a mesma cor. Suponha que existam 2022 triângulos monocromáticos azuis. Quantos triângulos monocromáticos vermelhos existem?

▸ **PROBLEMA 11**

(Miklós Schweitzer 2019) Uma matriz $n \times m$ matrix é *massa* se ela contém cada inteiro de 1 até mn exatamente uma vez e 1 é a única entrada que é a menor tanto em sua linha quanto em sua coluna. Prove que o número de matrizes $n \times m$ que são massa é exatamente $(nm)!n!m!/(n + m - 1)!$.

▸ **PROBLEMA 12**

(CIIM 2019) Considere o conjunto $\{0, 1\}^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$. Para dois elementos X, Y neste conjunto nos escrevemos $X > Y$ se $X \neq Y$ e as seguintes n inequações valem:

$$x_1 \geq y_1, \quad x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, \quad \dots \quad , x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

Defina uma cadeia de comprimento k como um subconjunto $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\} \subseteq \{0, 1\}^n$ de elementos distintos tais que $Z_1 > Z_2 > \dots > Z_k$. Encontre o maior comprimento que uma cadeia pode ter.

▸ **PROBLEMA 13**

(Miklos Schweitzer 2002) Seja G um grafo simples $k-$aresta conexo com n vértices e sejam u e v dois vértices distintos G. Prove que existem k caminhos disjuntos com respeito a vértices de u até v de modo que cada um destes caminhos possui no máximo $\frac{20n}{k}$ vértices.

▸ **PROBLEMA 14**

(OBM 2020)Considere N um número inteiro positivo.

Em uma espaçonave, há $2 \cdot N$ pessoas, e cada par dessas pessoas são amigos ou inimigos (ambas as relações são simétricas). Dois alienígenas jogam um jogo da seguinte maneira:

1. O primeiro alienígena escolhe qualquer pessoa que desejar.
2. A partir desse ponto, alternadamente, cada alienígena escolhe uma pessoa não escolhida anteriormente, de modo que a pessoa escolhida em cada turno seja amiga da pessoa escolhida no turno anterior.
3. O alienígena que não puder jogar em seu turno perde

Prove que o segundo jogador tem uma estratégia vencedora se, e somente se, as $2 \cdot N$ pessoas podem ser divididas em N pares de tal forma que duas pessoas no mesmo par são amigas.

▸ **PROBLEMA 15**

(IMC 2019) Sejam $x_1, \dots, x_n$ números reais. Para qualquer conjunto $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ seja $s(I) = \sum_{i \in I} x_i$. Assuma que a função $I \to s(I)$ assume pelo menos $(1, 8)^n$ valores onde I varre todos os 2^n subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Prove que o número de subconjuntos $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ para o qual $s(I) = 2019$ não excede $(1, 7)^n$.