Language: **Portuguese**

Day: **1**

Sábado, 13 de abril de 2024

Problema 1. Dois inteiros distintos u e v são escritos em um quadro. Realizamos uma sequência de etapas. A cada etapa, podemos fazer uma das duas operações seguintes:

(i) Se a e b são inteiros distintos no quadro, podemos escrever o inteiro $a+b$ no quadro, caso ele não esteja já escrito.

(ii) Se a, b e c são três inteiros distintos no quadro e se x é um inteiro que satisfaz $ax^2+bx+c=0$, podemos escrever o inteiro x no quadro, caso ele não esteja já escrito.

Determine todos os pares iniciais (u, v) a partir dos quais qualquer inteiro pode ser escrito no quadro depois de um número finito de etapas.

Problema 2. Seja ABC um triângulo com $AC > AB$ com circuncírculo Ω e incentro I. O incírculo intersecta os lados BC, CA, AB em D, E, F respectivamente. Sejam X e Y dois pontos nos arcos menores $\widehat{DF}$ e $\widehat{DE}$ do incírculo, respectivamente, tal que $\angle BXD = \angle DYC$. A reta XY intersecta a reta BC em K. Seja T o ponto em Ω tal que KT é tangente à Ω e T está do mesmo lado da reta BC que A. Prove que as retas TD e AI se intersectam em Ω.

Problema 3. Um inteiro positivo n é dito *peculiar* se, para qualquer divisor positivo d de n, o inteiro $d(d+1)$ divide $n(n+1)$. Mostre que, para qualquer quatro inteiros positivos peculiares distintos A, B, C e D, vale a seguinte afirmação:

$$\mathrm{mdc}(A, B, C, D) = 1.$$

Nota: mdc(A, B, C, D) é o maior inteiro positivo que divide cada um dos inteiros A, B, C e D.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Language: **Portuguese**

Day: **2**

Domingo, 14 de abril de 2024

Problema 4. Para uma sequência $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ de inteiros, um par (a_i, a_j) com $1 \leq i < j \leq n$ é chamado *legal* se existe um par (a_k, a_ℓ) de inteiros com $1 \leq k < \ell \leq n$ tal que

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Para cada $n \geq 3$, encontre o maior número possível de pares legais presentes em uma sequência de tamanho n.

Problema 5. Seja $\mathbb{N}_{>0}$ o conjunto dos inteiros positivos. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ tais que para todos os pares de inteiros positivos (x, y) valem as seguintes condições:

(i) x e $f(x)$ possuem o mesmo número de divisores positivos.

(ii) Se x não divide y e y não divide x, então

$$\text{mdc}(f(x), f(y)) > f(\text{mdc}(x, y)).$$

Nota: mdc(m, n) é o maior inteiro positivo que divide m e n.

Problema 6. Encontre todos os inteiros positivos d para o qual existe um polinômio P de grau d com coeficientes reais tal que $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ assumem no máximo d valores distintos.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos