5^a Competição Elon Lages Lima de Matemática
02 de Junho de 2024

1. A quantidade de funções $f : \{1, 2, \ldots, 2024\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ tal que a soma

$$S = f(1) + f(2) + \ldots + f(2024)$$

seja um número múltiplo de 4 é:

A) $3 \cdot 4^{2023}$

B) 4^{2023}

C) $3 \cdot 2^{2023}$

D) 2^{506}

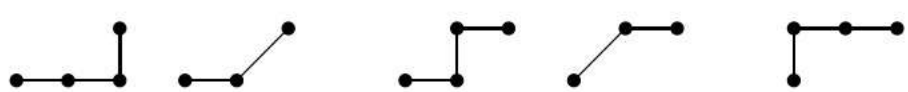
E) $3 \cdot 2^{253}$

Resposta: B

2. Num sistema de coordenadas cartesianas, uma partícula move-se, a partir da origem, dando um passo por vez, de um dos três tipos, a saber:

- Passo horizontal: leva do ponto (a, b) para o ponto $(a + 1, b)$;
- Passo vertical: leva do ponto (a, b) para o ponto $(a, b + 1)$;
- Passo diagonal: leva do ponto (a, b) para o ponto $(a + 1, b + 1)$.

A figura abaixo ilustra cada um dos caminhos existentes a partir da origem $(0, 0)$ de um sistema de coordenadas cartesianas até o ponto $(2, 1)$



Supondo que uma partícula desloca-se (dando um passo por vez) da origem $(0, 0)$ ao ponto (m, n), com m e n inteiros não negativos. O número de tais trajetórias, $D_{m,n}$, é conhecido como **Número de Dalannoy**. Diante do exposto, podemos afirmar que:

A) $D_{m,n} = \sum_{k}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n}{k}\binom{m}{k}$

B) $D_{m,n} = \sum_{k}^{\min\{m,n\}} \binom{m-n+k}{m}\binom{m}{k}$

C) $D_{m,n} = \sum_{k}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n+k}{k}\binom{n+k}{m}$

D) $D_{m,n} = \sum_{k}^{\min\{m,n\}} \binom{2m-n-k}{k}\binom{n+k}{m}$

E) $D_{m,n} = \sum_{k}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n-k}{m}\binom{m}{k}$

Resposta: E

3. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{se } n \text{ é par} \\ 2, \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Definindo $S(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$, podemos afirmar que $\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x}$ é igual a:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{4}{3}$

Resposta: C

4. A *parte inteira* do número real x é o maior inteiro que não é maior que x e é denotado por $\lfloor x \rfloor$. A *parte fracionária* do número real x é o valor $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Podemos afirmar que o limite

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ (e^x + \pi^x)^{\frac{1}{x}} \right\}$$

é igual a:

A) $e - 2$

B) $\dfrac{\ln 2}{3}$

C) $\dfrac{\ln 3}{2}$

D) $\pi - 3$

E) $\dfrac{\pi - e}{2}$

Resposta: D

5. A cada número natural com 4 algarismos $n = (abcd)_{10}$ escrito na base 10, associamos o seguinte determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Seja A a soma de todos os determinantes associados a todos os números com 4 algarismos. Qual das alternativas abaixo é igual ao resto da divisão de A por 7:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resposta: E

6. Considerando a sequência de Fibonacci

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \text{ e } f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ \forall\ n \geq 3$$

e o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T((x, y) = (y, x + y)$, podemos afirmar que:

A) $T^n(0,1) = (f_n, f_{n+1}),\ \forall n\ \in \mathbb{N}$.

B) $T^n(0,1) = (f_{n+1}, f_n),\ \forall n \in\ \mathbb{N}$.

C) $T^n(0,1) = (f_n^2, f_{n+1}^2),\ \forall n \in\ \mathbb{N}$.

D) $T^n(0,1) = (f_{n+1}^2, f_n^2),\ \forall n \in\ \mathbb{N}$.

E) $T^n(0,1) = (f_{n+1}, f_{n+2}),\ \forall n \in\ \mathbb{N}$.

Resposta: A

7. Seja S o conjunto de todos os inteiros positivos da forma $n^3 + 4n + 7$, com n inteiro positivo entre 1 e 100. Qual é a maior potência de 3 que divide um elemento de S?

D) 3

D) 9

D) 27

D) 81

D) 243

Resposta: D

8. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ e considere a sua 2024-ésima potência $B = A^{2024}$, uma matriz 2×2 com entradas inteiras. O resto na divisão por 5 do traço de B é (lembre que o traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal):

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resposta: C

9. Sejam $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, onde n é um inteiro positivo, o conjunto das matrizes reais de ordem n e $A, B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ tais que $AB - BA = A$. Podemos afirmar que:

A) Todos os autovalores de A são números complexos não reais.

B) A possui pelo menos um autovalor igual a 0.

C) Se λ é um autovalor de A então a matriz $A - \lambda.I_n$ (onde I_n é a matriz identidade de ordem n) é invertível.

D) Todos os autovalores de A são números complexos de módulo 1.

E) A é invertível.

Resposta: B

10. Seja C a curva plana real de equação $y^3 - x^2y + x = 0$. Se (x, y) se aproxima da origem $(0, 0)$ ao longo de C, de qual valor a expressão

$$E = \frac{x^2 - y^6}{x^4 + y^{10}}$$

se aproxima?

A) 0

B) -2

C) 1

D) -1

E) E não se aproxima de nenhum número real

Resposta: B

11. Para cada inteiro positivo n , seja L_n o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(nx)}{x^2}$$

Podemos afirmar que $L_{2024} - L_{2023}$ é igual a:

A) 4048^2

B) 506^2

C) 2024^2

D) 1012^2

E) 9096^2

Resposta: ANULADA, pois a resposta é $\dfrac{2024^2}{2}$.

12. A integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x(1+\tan^2 x+\tan x)dx$ é igual a:

A) 1

B) 0

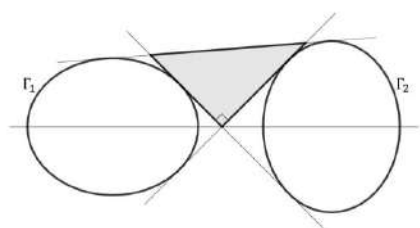
C) $e^{\frac{\pi}{4}}$

D) e^2

E) $\tan 1$

Resposta: C

13. A figura a seguir mostra duas elipses congruentes Γ_1 e Γ_2 cujos semieixos maior e menor medem $4cm$ e $3cm$ respectivamente. Se o eixo maior de Γ_1 e o eixo menor de Γ_2 são suportamos por uma mesma reta e, além disso, as duas retas tangentes externas às duas elipses são perpendiculares, conforme ilustra a figura a seguir



podemos afirmar que a medida da área do triângulo retângulo sombreado é igual a:

A) a^2+b^2

B) $\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$

C) $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$

D) $\dfrac{1}{10}(a^2+b^2)$

E) $\dfrac{1}{12}(a^2+b^2)$

Resposta: ANULADA, pois houve um erro no enunciado: seria a e b no lugar de $4cm$ e $3cm$.

A resposta seria $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

14. Seja a_n a sequência dada por $a_n = \cos\big(2\pi\cdot(4+2\sqrt{3})^n\big)$ para $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ é

A) -1

B) 1

C) 1/2

D) $-\sqrt{3}/2$

E) não existe

Resposta: B

15. Considere a função $T\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ dada por $T(x,y) = (7x+9y, 2x+3y)$. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto de $\mathbb{Z}^2$, qual a probabilidade de que ele pertença à imagem de T?

A) 1/2

B) 3/7

C) 1/9

D) 1/3

E) 7/9

Resposta: D

16. Para todo inteiro $n > 0$, seja $p(n)$ o **maior divisor ímpar** de n. O valor da expressão

$$p(2024) + p(2025) + p(2026) + \ldots + p(4048)$$

é igual a:

A) $2024 + 253$

B) $2024^2 + 253$

C) $2024^3 + 253$

D) $2024^4 + 253$

E) $2024^5 + 253$

Resposta: B

17. Se a, b, c e d são inteiros positivos tais que

$$68(abcd + ab + cd + ad + 1) = 157(bcd + b + d)$$

Podemos afirmar que o valor do produto $abdc$ é:

A) 120

B) 1680

C) 3024

D) 840

E) 336

Resposta: A

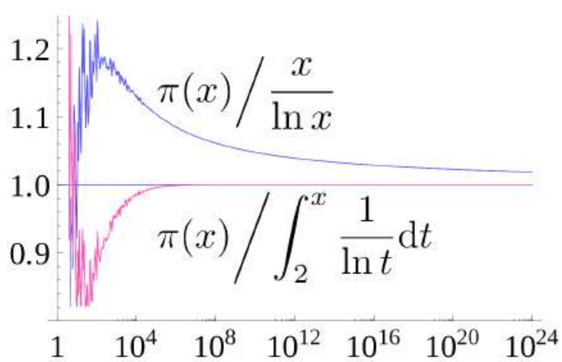
18. O **Teorema dos números primos** é um importante resultado assintótico sobre a distribuição dos números primos, que afirma que o número de primos menores ou iguais a x, representado por $\pi(x)$, cumpre a seguinte condição

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Este resultado foi primeiramente demonstrado (de modo independente) pelos matemáticos Jacques Hadamard e Charles-Jean de La Vallée Poussin. Entretanto, há outros resultados envolvendo o valor de $\pi(x)$, como por exemplo a desigualdade de Tchebyshev:

$$\frac{7}{8}\frac{x}{ln(x)} < \pi(x) < \frac{9}{8}\frac{x}{ln(x)}.$$

ou a integral logarítmica $Li(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\log t}dt$, que também é uma aproximação assintótica para a função $\pi(x)$, conforme ilustra a figura abaixo



Se sortearmos aleatoriamente, entre todos os possíveis números inteiros positivos com exatamente 10 dígitos, um número um único número, utilizando as estimativas anteriores, a probabilidade de que esse número seja primo é aproximadamente:

A) $\dfrac{5}{33.\ln 10}$

B) $\dfrac{3}{47.\ln 10}$

C) $\dfrac{8}{81.\ln 10}$

D) $\dfrac{1}{19.\ln 10}$

E) $\dfrac{3}{25.\ln 10}$

Resposta: C

19. Seja $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável tal que

$$f(x) \cdot f'(x) \geq x\sqrt{1-(f(x))^4}, \ \forall x \in (a, b) \text{ e}$$

$$\lim_{x \to a^+} (f(x))^2 = 1 \text{ e } \lim_{x \to b^-} (f(x))^2 = \frac{1}{2}$$

O valor mínimo de $a^2 - b^2$ é

A) 1

B) $\dfrac{\pi}{3}$

C) $\dfrac{\pi}{6}$

D) $\dfrac{\pi}{2}$

E) π

Resposta: B

20. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{e^2}{2} + \frac{11}{6}, \quad \int_0^1 f(x)e^x dx = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \text{ e } \int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$$

Podemos afirmar que $f(0)$ é igual a:

A) 0

B) 1

C) 2

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{e}{3}$

Resposta: ANULADA, pois há um ero de digitação no enunciado: O correto seria $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{4}{3}$.

A resposta correta seria B.

21. De quantas formas distintas 30 bolas de tênis idênticas podem ser distribuídas entre 6 tenistas, de modo que cada tenista receba pelo menos 3 bolas?

A) 1286

B) 2894

C) 4032

D) 6188

E) 8744

Resposta: D

22. Podemos afirmar que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$ é igual a:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

D) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Resposta: ANULADA, pois a resposta correta é $2 - \sqrt{2}$.

23. Um transmissor E transmite informação binária (ou seja, assumindo apenas o valor 0 ou o valor 1), um receptor R recebe esta informação que pode ou não estar em conformidade com a informação transmitida por E. Qualquer que seja a informação emitida por E (0 ou 1), a probabilidade de a informação recebida por R ser consistente com a informação emitida por E é igual a p com $0 < p < 1$ e a probabilidade de a informação recebida por R não estar em conformidade com a informação transmitida é igual a $1 - p$. Supõe-se que a informação binária é transmitida ao longo de uma cadeia de $n+1$ transmissores eletrônicos $E_0, E_1, \dots, E_n$, onde Cada elemento E_k é sucessivamente receptor e depois transmissor, exceto o primeiro elemento E_0 que é apenas transmissor e o último elemento E_n que é apenas receptor, que a informação transmitida por um transceptor é sempre idêntica à recebida e que para todo $k = 0, 1, \dots, n$, a transmissão de informação do elemento E_k para o próximo elemento E_{k+1} segue a lei definida acima. Assumindo que

- A qualidade da transmissão de um elemento E_k para o próximo elemento E_{k+1} não depende do que aconteceu durante transmissões anteriores.
- $A_k (0 \leq k \leq n)$ é evento em que o valor recebido por E_k é idêntico ao emitido por E_0, e designando sua probabilidade de ocorrência por p_k e definindo $p_0 = 1$.

Podemos afirmar que:

A) $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \frac{1}{2}$.

B) $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \frac{2}{3}$.

C) $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \frac{1}{3}$.

D) $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \frac{3}{8}$.

E) $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \frac{7}{9}$.

Resposta: A

24. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função bijetiva contínua e diferenciável. Se $a, b \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que o valor da integral

$$\int_{f(a)}^{f(b)} 2x(b - f^{-1}(x))dx$$

coincide com o valor da integral:

A) $\int_a^b (f^2(x) - 2f^2(a))dx$.

B) $\displaystyle\int_a^b (2f^2(x) - f^2(a))dx.$

C) $\displaystyle\int_a^b (f^2(x) - f^2(a))dx.$

D) $\displaystyle\int_a^b (2f^2(x) - 2f^2(a))dx.$

E) $\displaystyle\int_a^b (f^2(x) + f^2(a))dx.$

Resposta: C

25. Para cada inteiro positivo n, seja $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ o n-ésimo **número harmônico**. Podemos afirmar que a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+2}}{n(n+1)}$ é:

A) $\frac{9}{4}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{1}{4}$

Resposta: ANULADA, pois somatório inicia do $n = 1$ e não do $n = 0$. A resposta correta seria A.