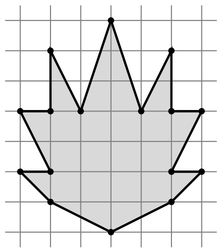
3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. A figura a seguir mostra o esboço do rosto e do cabelo de um personagem de anime num papel quadriculado. Se cada quadradinho tem lado 1, qual é a área da figura sombreada?



(A) $21,5$ (B) 22 (C) $22,5$ (D) 23 (E) 24

---

2. Esmeralda acertou 200 arremessos dos últimos 240 que ela fez nos jogos de basquete deste ano. Se K é a maior quantidade de arremessos consecutivos que ela acertou, qual o menor valor possível de K?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

---

3. Um tabuleiro 3×3 é chamado de *quadrado mágico* quando cada casinha é preenchida com um número de 1 a 9, sem repetição, de modo que a soma dos três números em cada linha, dos três em cada coluna e dos três nas duas diagonais principais é igual. No quadrado mágico abaixo, qual o valor da casa assinalada com X?

	7	
9		
X		8

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

4. Ronaldo coleciona canetas. Ao comprar uma de suas canetas ele notou que ela era uma edição limitada. Havia apenas 2719 canetas como aquela, cada uma numerada de 1 a 2719 e a dele era a 2179. Ele achou interessante o fato de o número da sua caneta ter exatamente os mesmos algarismos do número total de canetas e decidiu chamar de *especiais* as canetas dessa edição limitada que possuem numeração com essa propriedade. Há quantas canetas especiais nessa edição limitada?

(A) 2 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24

---

5. Na seguinte conta de multiplicação, A, B e C representam algarismos distintos:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \times & & & \mathrm{C} & \mathrm{C} \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

Qual é o valor de $A + B + C$?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

---

6. Sejam x, y, z, w inteiros positivos tais que $20^{24} = 2^x \cdot 5^y = 8^z \cdot 25^w$. Qual é o valor de $x + y + z + w$?

(A) 76 (B) 88 (C) 100 (D) 112 (E) 136

---

7. Paulo participou de uma corrida de rua e durante a corrida muitas fotos dele foram tiradas. Ao entrar no site da corrida cada foto em alta resolução custava 16 reais. Se ele comprasse entre 5 e 9 fotos tinha 18% de desconto no valor total. Mas se comprasse 10 ou mais tinha desconto de 41% no valor total. Paulo havia selecionado 8 fotos e iria pagar, mas ao considerar o desconto selecionou mais 2 fotos e fez a compra. Qual dos valores em reais a seguir é o mais próximo da diferença entre o valor que Paulo pagaria e o valor que Paulo pagou?

(A) 11 reais (B) 10 reais (C) 9 reais (D) 8 reais (E) 7 reais

---

8. Uma professora tem uma sala com menos de 100 alunos e possui 2024 balas para dar para eles. Ela gostaria de distribuir uma quantidade igual de balas para cada aluno e observou que precisaria comprar no mínimo 41 balas para fazê-lo. Quantos alunos a sala possui?

(A) 27 (B) 35 (C) 43 (D) 51 (E) 59

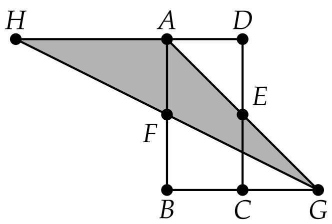
---

9. Qual o número máximo de meses com 5 quintas-feiras que um ano pode ter?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

---

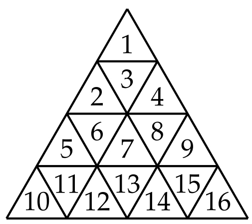
10. O retângulo $ABCD$ possui lados com medidas $AB = 8$ e $BC = 4$. Os pontos E e F são pontos médios dos lados CD e AB, respectivamente. A reta AE encontra a reta BC em G e a reta GF encontra a reta AD em H. Qual é a área do triângulo AGH?



(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48

---

11. Quantos triângulos na figura abaixo tem a soma de seus números par?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

---

12. Em uma cidade com 2025 habitantes, cada pessoa sempre mente ou sempre fala a verdade. Um dia Ana, que é habitante desta cidade, faz o seguinte anúncio: "Nessa cidade há um número ímpar de pessoas mentirosas!"

Considere as seguintes afirmações:

i. Ana sempre fala a verdade.

ii. Existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade.

iii. Existe pelo menos uma pessoa que diz a verdade na cidade.

iv. Existe pelo menos uma pessoa diferente de Ana que sempre diz a verdade na cidade.

Quantas afirmações são necessariamente verdadeiras?

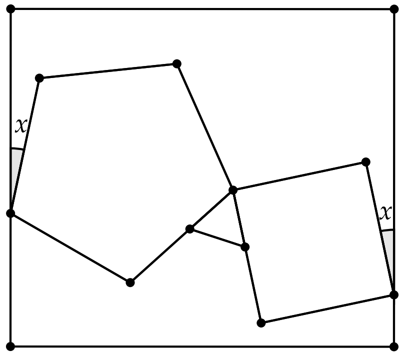
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

---

13. O produto dos primeiros 24 inteiros positivos é igual a 620 448 401 7**N**3 239 439 360 000. O décimo primeiro algarismo foi substituído por **N**. Qual é o valor desse algarismo?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

14. Na figura a seguir, no interior de um retângulo há um pentágono regular, um triângulo equilátero e um quadrado. Os três polígonos regulares possuem um vértice em comum, os outros dois vértices do triângulo equilátero estão sobre os lados do pentágono e do quadrado e o pentágono e o quadrado possuem um vértice sobre os lados do retângulo. Sabe-se que lados do pentágono e do quadrado formam ângulos com medida x com lados opostos do retângulo (como na figura). Quanto vale x em graus?



(A) 12° (B) 15° (C) 18° (D) 20° (E) 24°

15. Em um tabuleiro $n \times m$ escrevemos o número 1 em sua casa superior esquerda. A partir de então seguimos o seguinte preenchimento: se a última casa foi preenchida com o número i, caso a casa uma coluna à direita e uma linha abaixo está vazia, a preenchemos com o número $i + 1$. Se essa casa estava previamente preenchida, paramos o processo. Aqui consideramos que a coluna imediatamente à direita da última coluna é a primeira coluna e que a linha abaixo da última linha é a primeira linha. A seguir apresentamos o preenchimento do tabuleiro 3×4.

1	10	7	4
5	2	11	8
9	6	3	12

Sabendo que, após terminar o processo de preenchimento, podem haver casinhas sem números, qual o maior número utilizado no preenchimento do tabuleiro 15×24?

(A) 60 (B) 90 (C) 120 (D) 180 (E) 360

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Pedro falou para Joana que consegue correr 12 quilômetros em 1 hora e 20 minutos. Então Joana disse "então você corre 10 quilômetros em 1 hora?". E Pedro respondeu "não, se eu corresse 10 quilômetros em 1 hora, então completaria 12 quilômetros em menos tempo." Considerando que Pedro sempre corre com velocidade constante, quantos minutos a menos Pedro levaria para completar 12 quilômetros?

Resposta do problema 16: | | | | |

17. Seja N um inteiro positivo de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é igual a 3 e seja M o número obtido de N apagando esse algarismo 3 e escrevendo-o no começo de N. Sabe-se que M é 2025 unidades menor que N. Qual é o valor de N?

Resposta do problema 17: | | | | |

18. Entre 2h e 2h40 da tarde, Mariana olhou seu relógio e percebeu que o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos formavam um ângulo de 105°. Suponha que o horário está marcando 2 horas, m minutos e s segundos. Quanto é $m + s$?

Resposta do problema 18: | | | | |

19. Um número *a ganha* de outro b se $a > b$ e o número obtido invertendo os dígitos de a na base decimal é maior do que o número obtido invertendo os dígitos de b na base decimal. Por exemplo, 314 ganha de 291 pois 314 > 291 e 413 > 192. Por outro lado, 314 não ganha de 309 pois 413 < 903.

Quantos números de quatro algarismos ganham de 2024?

Resposta do problema 19: | | | | |

20. Considere a expressão

$$\_\_\,1\,\_\_\,2\,\_\_\,3\,\ldots\,\_\_\,99\,\_\_\,100.$$

Em cada espaço vazio, coloque + ou − e calcule o resultado. Quantos são os possíveis restos desse resultado na divisão por 100?

Resposta do problema 20: | | | | |

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: (   ) 6º   (   ) 7º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. Sejam x, y, z, w inteiros positivos tais que $20^{24} = 2^x \cdot 5^y = 8^z \cdot 25^w$. Qual é o valor de $x + y + z + w$?

(A) 76 (B) 88 (C) 100 (D) 112 (E) 136

---

2. Lucas estava participando de uma corrida de rua de 21 quilômetros e olhando sempre o tempo médio por quilômetro. Ao final do quilômetro 14 o seu tempo médio era de 6 minutos e 42 segundos por quilômetro. Nos últimos 7 quilômetros o ritmo dele baixou e ele concluiu o quilômetro 21 com tempo médio de 6 minutos e 50 segundos por quilômetro no percurso completo. Qual foi o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros?

(A) 6 min 58 seg (B) 7 min (C) 7 min 2 seg (D) 7 min 4 seg (E) 7 min 6 seg

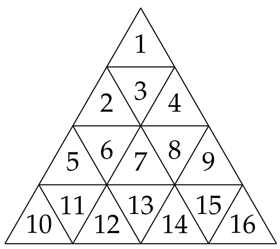
---

3. Qual o número máximo de meses com 5 quintas-feiras que um ano pode ter?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

---

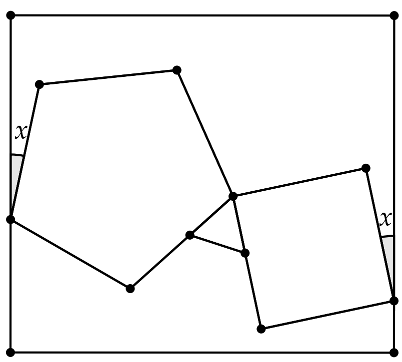
4. Quantos triângulos na figura abaixo tem a soma de seus números par?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

---

5. Na figura a seguir no interior de um retângulo há um pentágono regular, um triângulo equilátero e um quadrado. Os três polígonos regulares possuem um vértice em comum, os outros dois vértices do triângulo equilátero estão sobre os lados do pentágono e do quadrado e o pentágono e o quadrado possuem um vértice sobre os lados do retângulo. Sabe-se que lados do pentágono e do quadrado formam ângulos com medida x com lados opostos do retângulo (como na figura). Quanto vale x em graus?



(A) 12° (B) 15° (C) 18° (D) 20° (E) 24°

---

6. Uma professora tem uma sala com menos de 100 alunos e possui 2024 balas para dar para eles. Ela gostaria de distribuir uma quantidade igual de balas para cada aluno e observou que precisaria comprar no mínimo 41 balas para fazê-lo. Quantos alunos a sala possui?

(A) 27 (B) 35 (C) 43 (D) 51 (E) 59

---

7. Em uma cidade com 2025 habitantes, cada pessoa sempre mente ou sempre fala a verdade. Um dia Ana, que é habitante desta cidade, faz o seguinte anúncio: “Nessa cidade há um número ímpar de mentirosos!”

Considere as seguintes afirmações:

i. Ana sempre fala a verdade.

ii. Existe pelo menos um mentiroso na cidade.

iii. Existe pelo menos uma pessoa que diz a verdade na cidade.

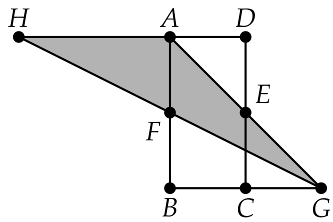
iv. Existe pelo menos uma pessoa diferente de Ana que sempre diz a verdade na cidade.

Quantas afirmações são necessariamente verdadeiras?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

---

8. O retângulo $ABCD$ possui lados com medidas $AB = 8$ e $BC = 4$. Os pontos E e F são pontos médios dos lados CD e AB, respectivamente. A reta AE encontra a reta BC em G e a reta GF encontra a reta AD em H. Qual é a área do triângulo AGH?



(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48

---

9. No planeta Xorpzorp, as semanas têm 11 dias (chamados de 1ª-feira, . . . 11ª-feira); os meses alternam entre 50 e 51 dias, e os anos têm exatamente 5 meses, ou seja, alternam entre 252 ou 253 dias. Em Xorpzorp, um dia tem a mesma duração de um dia terrestre.

Hoje, nesse planeta, é 4ª-feira, dia 51 do mês 4 de 2024. Daqui a 24 anos terrestres, qual será o dia no calendário Xorpzorp?

(A) 8ª-feira, dia 51 do mês 4

(B) 3ª-feira, dia 29 do mês 2

(C) 2ª-feira, dia 50 do mês 2

(D) 8ª-feira, dia 24 do mês 3

(E) 3ª-feira, dia 30 do mês 3

---

10. O triângulo ABC é isósceles de base BC. Os pontos E no segmento AB e F, G no segmento AC satisfazem:

- A, F, G e C estão dispostos nessa ordem;
- $AF = EF$;
- EF é bissetriz de $\angle AEG$;
- GB é bissetriz de $\angle EGC$;
- $BC = BG$.

Quanto vale o ângulo $\angle BAC$?

(A) 30° (B) 36° (C) 40° (D) 45° (E) 60°

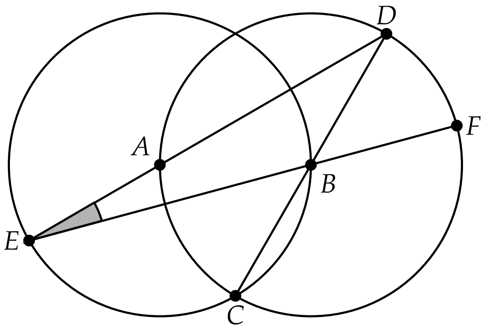
---

11. Maria escreveu no quadro branco os primeiros 1000 múltiplos de 23, começando com 23 e em ordem crescente. José, em seguida, apagou os dígitos a partir do quarto, em cada número (então 12345 vira 345). Sobrou uma lista de 1000 números de 3 (ou menos) dígitos.

Entre as alternativas a seguir, qual delas aparece por último no quadro branco?

(A) 112 (B) 113 (C) 114 (D) 115 (E) 116

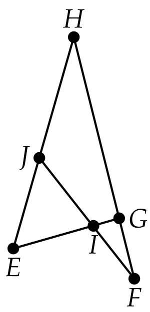
12. As circunferências ω_1 de centro A que passa por B e ω_2 de centro B que passa por A se encontram no ponto C. A reta BC corta ω_2 novamente em D. A reta DA corta ω_1 em E (o ponto A está entre D e E). Finalmente, a reta EB corta ω_2 em F (o ponto B está entre E e F). Determine a medida em graus do ângulo $\angle DEF$.



(A) 12° (B) 15° (C) 20° (D) 25° (E) 30°

13. De quantas maneiras podemos pintar os pontos E, F, G, H, I, J da figura a seguir, cada um com exatamente uma cor, se temos disponíveis as cores vermelho, verde e azul, e se não devemos permitir que três pontos colineares recebam a mesma cor?

(A) 279 (B) 324 (C) 405 (D) 450 (E) 648



14. Determine o número de possíveis valores de a para que o sistema $a^3 + b = 4c$, $a + b^3 = c$ e $ab = -1$ tenha solução.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

15. Um tabuleiro 15×36 será coberto, sem sobreposição, por peças quadradas de tamanhos 5×5 e 7×7. Se nenhuma parte dessas peças pode ficar fora do tabuleiro, qual o número mínimo de quadradinhos que não serão cobertos?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Seja N um inteiro positivo de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é igual a 3 e seja M o número obtido de N apagando esse algarismo 3 e escrevendo-o no começo de N. Sabe-se que M é 2025 unidades menor que N. Qual é o valor de N?

Resposta do problema 16: | | | | |

17. Um número a *ganha* de outro b se $a > b$ e o número obtido invertendo os dígitos de a na base decimal é maior do que o número obtido invertendo os dígitos de b na base decimal. Por exemplo, 314 ganha de 291, pois $314 > 291$ e $413 > 192$. Por outro lado, 314 não ganha de 309, pois $413 < 903$.

Quantos números de quatro algarismos ganham de 2024?

Resposta do problema 17:

---

18. Considere a expressão

$$\_\_\_1\_\_\_2\_\_\_3\ldots\_\_\_2023\_\_\_2024$$

Em cada espaço vazio, coloque um + ou um - e calcule o resultado. Quantos são os possíveis restos desse resultado na divisão por 2024?

Resposta do problema 18:

---

19. Sejam a, b e c tais que:

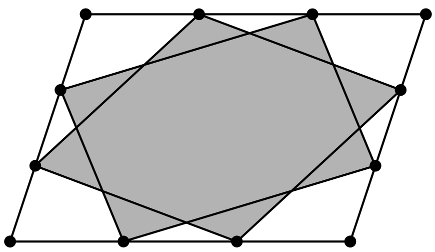
$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ a^2+b^2+c^2=20 \\ a^3+b^3+c^3=30 \end{cases}$$

Calcule o valor de $a^5+b^5+c^5$.

Resposta do problema 19:

---

20. Na figura a seguir temos um paralelogramo em que cada lado foi dividido em três partes iguais. Os pontos sobre os lados foram ligados alternadamente para formar dois quadriláteros. A figura sombreada é formada pela união das regiões desses dois quadriláteros. A razão entre a área sombreada e a área do paralelogramo pode ser escrita como fração irredutível $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Quanto vale $p+q$?



Resposta do problema 20:

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: (   ) 8º   (   ) 9º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

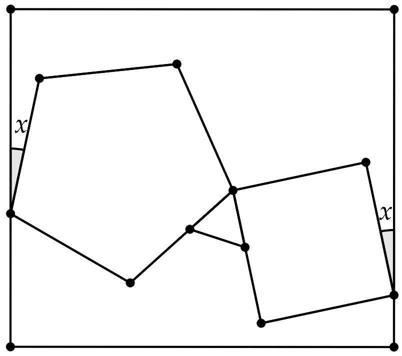
Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. Lucas estava participando de uma corrida de rua de 21 quilômetros e olhando sempre o tempo médio por quilômetro. Ao final do quilômetro 14 o seu tempo médio era de 6 minutos e 42 segundos por quilômetro. Nos últimos 7 quilômetros o ritmo dele baixou e ele concluiu o quilômetro 21 com tempo médio de 6 minutos e 50 segundos por quilômetro no percurso completo. Qual foi o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros?

(A) 6 min 58 s (B) 7 min (C) 7 min 2 s (D) 7 min 4 s (E) 7 min 6 s

---

2. Na figura a seguir, no interior de um retângulo há um pentágono regular, um triângulo equilátero e um quadrado. Os três polígonos regulares possuem um vértice em comum, os outros dois vértices do triângulo equilátero estão sobre os lados do pentágono e do quadrado e o pentágono e o quadrado possuem um vértice sobre os lados do retângulo. Sabe-se que lados do pentágono e do quadrado formam ângulos com medida x com lados opostos do retângulo (como na figura). Quanto vale x em graus?



(A) 12° (B) 15° (C) 18° (D) 20° (E) 24°

---

3. Miguelito é um bebê bem chorão, mas a frequência com que ele chora é bem curiosa, pois todo dia ele chora exatamente 73 vezes ou exatamente 42 vezes. Sabe-se que em certo mês, ele chorou exatamente 2024 vezes. Em quantos dias Miguelito chorou 73 vezes?

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 29

---

4. Qual o número máximo de meses com 5 quintas-feiras que um ano pode ter?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

---

5. Quaisquer que sejam a e b reais positivos satisfazendo $b = 1 + \frac{a}{b}$, podemos afirmar que o valor da expressão $2b - \sqrt{1 + 4a}$ é igual a

(A) 1 (B) a (C) b (D) $a - 1$ (E) $4b - 1$

---

6. Em uma cidade com 2025 habitantes, cada pessoa sempre mente ou sempre fala a verdade. Um dia Ana, que é habitante desta cidade, faz o seguinte anúncio: "Nessa cidade há um número ímpar de mentirosos!"

Considere as seguintes afirmações:

i. Ana sempre fala a verdade.

ii. Existe pelo menos um mentiroso na cidade.

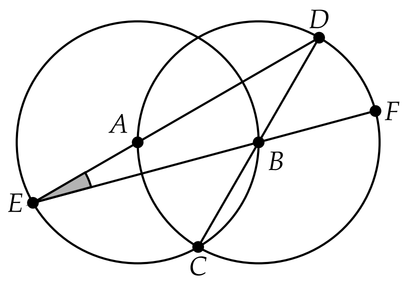
iii. Existe pelo menos uma pessoa que diz a verdade na cidade.

iv. Existe pelo menos uma pessoa diferente de Ana que sempre diz a verdade na cidade.

Quantas afirmações são necessariamente verdadeiras?

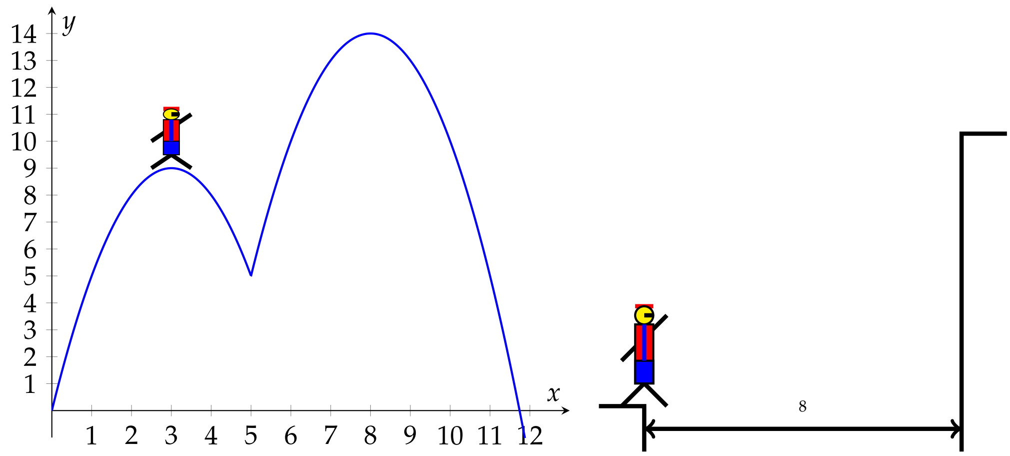
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. As circunferências ω_1 de centro A que passa por B e ω_2 de centro B que passa por A se encontram no ponto C. A reta BC corta ω_2 novamente em D. A reta DA corta ω_1 em E (o ponto A está entre D e E). Finalmente, a reta EB corta ω_2 em F (o ponto B está entre E e F). Determine a medida, em graus, do ângulo $\angle DEF$.



(A) 12° (B) 15° (C) 20° (D) 25° (E) 30°

8. Um personagem de um videogame, o OBMario, tem um *pulo duplo* que funciona da seguinte maneira: se OBMario está na origem $(0;0)$ e pula para a direita, sua posição coincide com um arco da curva $y = 6x - x^2$. Em qualquer ponto desse arco, OBMario pode fazer outro pulo para a direita, fazendo a trajetória da mesma curva, mas deslocada para sua posição atual.



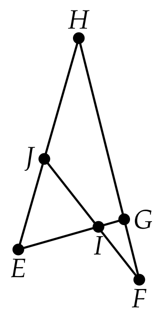
OBMario precisa pular um buraco de comprimento 8 para alcançar uma plataforma com altura h. O maior valor de h para que isso seja possível é

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 22

9. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de lado 12 e sejam M o ponto médio de AB e N o centro do triângulo ABD. Se P e Q são pontos variáveis sobre as arestas AC e AD, respectivamente, então o menor valor possível para $MP + PQ + QN$ é

(A) 12 (B) 15 (C) $3 + 6\sqrt{3}$ (D) $6 + 4\sqrt{3}$ (E) $2\sqrt{39}$

10. De quantas maneiras podemos pintar os pontos E, F, G, H, I, J da figura a seguir, cada um com exatamente uma cor, se temos disponíveis as cores vermelho, verde e azul, e se não devemos permitir que três pontos colineares recebam a mesma cor?



(A) 279 (B) 324 (C) 405 (D) 450 (E) 648

11. Maria escreveu no quadro branco os primeiros 1000 múltiplos de 23, começando com 23 e em ordem crescente. José, em seguida, apagou os dígitos a partir do quarto, em cada número (então 12345 vira 345). Sobrou uma lista de 1000 números de 3 (ou menos) dígitos.

Entre as alternativas a seguir, qual delas aparece por último no quadro branco?

(A) 112 (B) 113 (C) 114 (D) 115 (E) 116

12. Um quadrilátero cíclico tem lados medindo 1, 2, 3 e 4. O raio do círculo circunscrito a esse quadrilátero é

(A) $\frac{\sqrt{3210}}{24}$ (B) $\frac{\sqrt{3102}}{24}$ (C) $\frac{\sqrt{1302}}{24}$ (D) $\frac{\sqrt{2130}}{24}$ (E) $\frac{\sqrt{2310}}{24}$

13. Uma tripla de números (a, b, c) é *interessante* quando $\text{mdc}(a, b) > 1$, $\text{mdc}(a, c) > 1$, $\text{mdc}(b, c) > 1$ e $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Sorteamos ao acaso três divisores positivos a, b, c (não necessariamente distintos) de 30^9. Qual é a probabilidade de (a, b, c) ser interessante?

(A) $\frac{2\cdot3^{10}}{10^9}$ (B) $\frac{2\cdot3^{11}}{10^9}$ (C) $\frac{2\cdot3^{12}}{10^9}$ (D) $\frac{2\cdot3^{13}}{10^9}$ (E) $\frac{2\cdot3^{14}}{10^9}$

14. Sendo $z = x + yi$, x, y reais e i tal que $i^2 = -1$, o conjugado de z é $\overline{z} = x - yi$. Seja $f(z) = z^2 + 5z + c$, c real. Sabe-se que existem quatro valores de z tais que $f(z) = \overline{z}$. Quais são os possíveis valores de c?

(A) $0 < c < 1$ (B) $1 < c < 2$ (C) $2 < c < 3$ (D) $3 < c < 4$ (E) $c > 4$

15. As 5 lâmpadas de um mural, que estão alinhadas, estão queimadas e precisam ser trocadas. Para realizar tal troca, as 5 lâmpadas devem ser removidas e 5 novas lâmpadas devem ser instaladas, com a remoção ocorrendo necessariamente antes da instalação, mas não necessariamente imediatamente antes. Ou seja, é possível remover uma lâmpada queimada de um local e realizar outras remoções ou instalações antes de instalar uma nova lâmpada naquele local. Além disso, existem apenas 6 lâmpadas novas disponíveis: 2 vermelhas, 2 azuis e 2 verdes. De quantas maneiras é possível realizar tal troca, levando em consideração as cores das lâmpadas e a ordem de remoção e instalação de cada uma?

(A) $\frac{10!\cdot6!}{(5!)^2\cdot(3!)^2}$ (B) $\frac{10!\cdot5!}{2^8}$ (C) $\frac{10!\cdot5!}{2^7}$ (D) $\frac{10!\cdot6!}{2^8}$ (E) $\frac{(5!)^3}{2^8}$

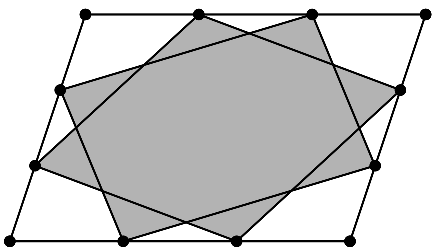
Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Considere todos os números primos positivos p tais que a equação do segundo grau $x^2 - 12x - 19p = 0$ admite duas soluções inteiras x. Determine a soma de todos os tais primos p.

Resposta do problema 16: | | | | |

17. Na figura a seguir temos um paralelogramo em que cada lado foi dividido em três partes iguais. Os pontos sobre os lados foram ligados alternadamente para formar dois quadriláteros. A figura sombreada é formada pela união das regiões desses dois quadriláteros. A razão entre a área sombreada e a área do paralelogramo pode ser escrita como fração irredutível $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Quanto vale $p + q$?



Resposta do problema 17: | | | | |

18. Sendo $P(x)$ um polinômio de grau 5 e coeficientes inteiros safisfazendo:

$$P(1) = 1^5,\ P(2) = 2^5,\ P(3) = 3^5,\ P(4) = 4^5 \text{ e } P(5) = 5^5.$$

Se $P(6) > 0$, qual é o menor valor possível para $P(6)$?

Resposta do problema 18:

---

19. Quantas sequências $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ de inteiros positivos satisfazem a equação

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_1a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5} + \frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} = 1?$$

Resposta do problema 19:

---

20. Sejam x, y, z inteiros positivos tais que

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz = 123.$$

Determine o valor de $x^2 + y^2 + z^2$.

Resposta do problema 20:

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: ( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º ( ) Pós 3º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. B	2. C	3. D	4. C	5. B
6. C	7. A	8. E	9. B	10. C
11. D	12. D	13. B	14. A	15. C

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0008	5583	0030	4629	0050

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. C	2. E	3. B	4. D	5. A
6. E	7. D	8. C	9. E	10. D
11. C	12. B	13. D	14. E	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	5583	4629	1012	3000	0089

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

1. E	2. A	3. B	4. B	5. A
6. D	7. B	8. B	9. E	10. D
11. C	12. E	13. D	14. D	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0038	0089	0096	0019	5045

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. B	2. C	3. D	4. C	5. B
6. C	7. A	8. E	9. B	10. C
11. D	12. D	13. B	14. A	15. C

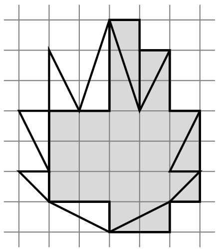
Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0008	5583	0030	4629	0050

Soluções – Testes

1. *Alternativa B*

Vamos "recortar" e "colar" alguns triângulos:



Contando por coluna, temos a área de $3+3+7+6+3=22$.

---

2. *Alternativa C*

Esmeralda errou $240-200=40$ arremessos, de modo que ela tem no máximo 41 sequências de arremessos consecutivos convertidos. Como 200 dividido por 41 é 4 com resto 36, existe uma sequência com pelo menos 5 arremessos convertidos consecutivos.

Esmeralda pode acertar os arremessos de ordem múltiplo de 6; nesse caso, ela sempre acerta cinco e logo depois erra uma, errando $240/6=40$ vezes e acertando as demais 200 vezes.

---

3. *Alternativa D*

A soma dos nove números é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Como as três linhas têm a mesma soma, tal soma é $45/3=15$. Considerando os números na segunda linha, na segunda coluna, e nas duas diagonais, somamos doze números, sendo que o número do meio é somado quatro vezes, enquanto os demais são somados uma vez só. Assim, o número do meio, que foi somado três vezes a mais, é $\frac{4\cdot 15-45}{3}=5$.

Com isso, o número no canto superior direito é $15-8-5=2$ e $X=15-9-2=4$.

2	7	
9	5	
X		8

---

4. *Alternativa C*

As canetas especiais são as de número no máximo 2719 que tem esses algarismos. O algarismo dos milhares pode ser então 1, para o qual qualquer uma das $3\cdot 2\cdot 1=6$ possibilidades (1279, 1297, 1729, 1792, 1927 e 1972) é especial, ou 2, para o qual 2179, 2197 e 2719 são especiais. São $6+3=9$ canetas especiais.

---

5. *Alternativa B*

Veja que $CC = 10C + C = 11C$ é múltiplo de 11 e $2024/11 = 184 = 2 \cdot 92 = 4 \cdot 46 = 8 \cdot 23$, ou seja,

$$2024 = 22 \cdot 92 = 44 \cdot 46 = 88 \cdot 23.$$

Como A, B e C são distintos, $C = 8$, $A = 2$ e $B = 3$, e a soma $A + B + C$ é $2 + 3 + 8 = 13$.

---

6. *Alternativa C*

Sendo $20^{24} = (2^2 \cdot 5)^{24} = 2^{48} \cdot 5^{24}$, e $8^z \cdot 25^w = (2^3)^z \cdot (5^2)^w = 2^{3z} \cdot 5^{2w}$, temos $x = 48$, $y = 24$, $3z = 48$ e $2w = 24$, de modo que $x + y + z + w = 48 + 24 + 48/3 + 24/2 = 100$.

---

7. *Alternativa A*

O preço de oito fotos é $8 \cdot 16 \cdot (1 - 0{,}18) = 104{,}96$ reais e o preço de dez fotos é $10 \cdot 16 \cdot (1 - 0{,}41) = 94{,}40$ reais. A diferença é $104{,}96 - 94{,}40 = 10{,}56$ reais, que é mais próximo de 11 reais.

---

8. *Alternativa E*

A quantidade $2024 + 41 = 2065$ de balas é múltipla da quantidade de alunos na sala; como 41 é o mínimo de balas que ela deve comprar, a quantidade de alunos na sala é maior do que 41. Sendo $2065 = 5 \cdot 7 \cdot 59$, seus divisores são $1, 5, 7, 35, 59, 5 \cdot 59, 7 \cdot 59, 2065$. O único número entre 42 e 100 é 59, então a sala tem 59 alunos.

---

9. *Alternativa B*

Como um ano tem 365 ou 366 dias e 366 dividido por 7 é 52 com resto 2, em um ano há 52 semanas mais 1 ou 2 dias. Logo há 52 ou 53 quintas-feiras. Cada mês tem quatro ou cinco quintas-feiras. Como 52 dividido por 4 é 4 com resto 4 e 53 dividido por 12 é 4 com resto 5, há 4 ou 5 meses com cinco quintas-feiras.

---

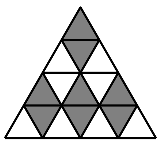
10. *Alternativa C*

Temos $DE = EC$, $\angle ADE = \angle ECG$ (retos) e $\angle AED = \angle CEG$ (opostos pelo vértice). Assim, pelo caso ALA, os triângulos ADE e GCE são congruentes; logo $CG = AD = 4$. Da mesma forma, os triângulos AHF e BGF são congruentes. Logo $AH = BG = BC + CG = 4 + 4 = 8$. Assim o triângulo AGH tem base $AH = 8$ e altura $AB = 8$, e portanto área $\frac{8 \cdot 8}{2} = 32$.

---

11. *Alternativa D*

Pinte os triângulos com números ímpares:



A soma de números inteiros é par quando a quantidade de parcelas ímpares é par. Assim, devemos contar a quantidade de triângulos com uma quantidade par de triângulos pintados em seu interior. Chame de *tamanho* do triângulo o tamanho de seu lado com relação aos triângulos menores. Dividimos em casos:

- Há 8 triângulos de tamanho 1 pintados e 8 triângulos de tamanho 1 não pintado.
- Todo triângulo de tamanho 2 tem em seu interior um losango pintado ou não pintado mais dois triângulos menores da cor oposta. Assim, cada triângulo de tamanho 2 tem uma quantidade par de triângulos pintados em seu interior. São 7 triângulos no total: $1 + 2 + 3 = 6$ apontando para cima e um, ligando os pontos médios do triângulo maior, apontando para baixo.
- Há três triângulos de tamanho 3, um em cada canto do triângulo maior, com 5, 4 e 4 triângulos pintados.
- O triângulo maior tem 8 triângulos pintados em seu interior.

O total é $8 + 7 + 2 + 1 = 18$.

---

12. *Alternativa D*

- A afirmação i não é necessariamente verdadeira, pois Ana e outra pessoa podem ser as únicas pessoas mentirosas da cidade.
- A afirmação ii é verdadeira. Se Ana é mentirosa, existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade (Ana); se Ana fala a verdade, a quantidade de pessoas mentirosas na cidade é ímpar e, portanto, diferente de zero, ou seja, existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade.
- A afirmação iii é verdadeira. Se Ana diz a verdade, existe pelo menos uma pessoa que fala a verdade na cidade (Ana); se Ana mente, a quantidade de pessoas mentirosas na cidade é par, e como a cidade tem um total ímpar (2025) de habitantes, a quantidade de pessoas que falam a verdade na cidade é ímpar, ou seja, existe pelo menos uma pessoa que fala a verdade na cidade.
- A afirmação iv é verdadeira. Se Ana diz a verdade, a quantidade de pessoas mentirosas é ímpar e a quantidade de pessoas que falam a verdade é par, sendo Ana uma delas. Assim, outra pessoa fala a verdade. Se Ana mente, pela afirmação iii existe uma pessoa que fala a verdade na cidade, que não é Ana.

---

13. *Alternativa B*

O produto dos 24 primeiros inteiros positivos é múltiplo de 9, portanto a soma de seus algarismos é múltiplo de 9. Logo

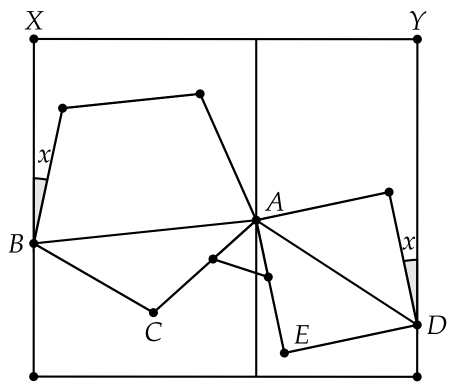
$$6+2+0+4+4+8+4+0+1+7+N+3+2+3+9+4+3+9+3+6+0+0+0+0 = 78+N = 9\cdot 9+(N-3)$$

é múltiplo de 9, e $N = 3$.

---

14. *Alternativa A*

Trace as diagonais como na figura a seguir. Os ângulos internos do pentágono regular e do quadrado são, respectivamente, $\frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ e 90°. Trace também uma reta vertical passando pelo vértice comum ao pentágono e ao quadrado.



No triângulo ABC, $\angle ABC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$; no triângulo ADE, $\angle ADE = \angle EAD = 45^\circ$. O ângulo $\angle BAD$ mede

$$\angle BAC + \angle CAE + \angle EAD = \angle ABX + \angle ADY \iff 36^\circ + 60^\circ + 45^\circ = x + (108^\circ - 36^\circ) + x + 45^\circ \iff x = 12^\circ.$$

---

15. *Alternativa C*

Diremos que uma casa a é *anterior* a uma casa b quando b está uma linha abaixo e uma coluna à direita de a, considerando as convenções do enunciado (a linha abaixo da última linha é a primeira linha e a coluna à direita da última coluna é a primeira coluna). Também dizemos que b é posterior a a. Toda casa é posterior ou anterior a exatamente duas outras casas. O processo acaba quando a casa posterior já está preenchida. Nesse momento, a única casa preenchida sem ambas as casas posterior e anterior a ela preenchidas é a casa 1. Assim, o processo acaba na casa anterior de 1, que é a casa na última linha e última coluna (o canto inferior direito).

Note que a cada passo descemos uma unidade e vamos uma unidade para a direita; se começamos com 1, chegamos na última linha ao escrever o número 15. Depois, voltamos na primeira linha e escrevemos 16, e voltamos à última linha ao escrever 30. De fato, a cada 15 números voltamos para a última linha, ou seja, os números escritos na última linha são os múltiplos de 15. Da mesma forma, os números escritos na última coluna são os múltiplos de 24. O mínimo múltiplo comum de $15 = 3\cdot 5$ e $24 = 2^3\cdot 3$, $\text{mmc}(15,24) = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120$, deve então estar na última linha e última coluna. Portanto o maior número escrito é 120.

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 0008

Como Pedro corre 10 km em 1 hora, na mesma velocidade constante ele correria 12 km em $\frac{12}{10} = 1{,}2$ hora, ou seja, 1 hora e $0{,}2 \cdot 60 = 12$ minutos. Esse tempo seria $20 - 12 = 8$ minutos a menos do que 1 hora e 20 minutos.

---

17. *Resposta:* 5583

Seja x o número de três algarismos obtido após apagar o algarismo das unidades de N. Assim, $N = 10x + 3$ e $M = 3000 + x$. Com isso,

$$M = N - 2025 \iff 3000 + x = 10x + 3 - 2025 \iff x = 558.$$

---

18. *Resposta:* 0030

Às 2h, o ponteiro das horas está $2 \cdot \frac{360^\circ}{12} = 60^\circ$ à frente do ponteiro dos minutos. Até as 2h40min, o ponteiro dos minutos ultrapassa o das horas exatamente uma vez, ou seja, anda $60^\circ + 105^\circ = 165^\circ$ a mais do que o ponteiro das horas. A cada hora, o ponteiro dos minutos anda $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ a mais do que o ponteiro das horas, logo passou $\frac{165^\circ}{330^\circ} \cdot 60 = 30$ minutos. Assim, $m + s = 30$.

---

19. *Resposta:* 4629

Seja N um número que ganha de 2024, ou seja, tal que $N > 2024$ e o número invertendo os algarismos de N é maior do que 4202. Se o algarismo U das unidades de N é 5, 6, 7, 8 ou 9, então os outros três algarismos MCD de $N = MCDU$ variam entre 202 e 999. Temos que N ganha de 2024, pois ao inverter os algarismos obtemos $UDCM$, com um milhar U maior do que 4, e portanto um número maior do que 4202. Há, nesse caso, $5 \cdot (999 - 202 + 1) = 3990$ possibilidades.

Se o algarismo das unidades de N é 4, dividimos em dois casos: se o algarismo das dezenas é 3 ou mais (7 possibilidades), ao inverter obtemos $4DCM > 4300 > 4202$. O das centenas pode ser qualquer um e o dos milhares pode ser qualquer um maior ou igual a 2. Há $7 \cdot 10 \cdot 8 = 560$ possibilidades. Se o algarismo das dezenas é 2, a inversão de N é $42CM$ e basta que $CM > 02$, ou seja, os outros dois algarismos MC variem entre 21 e 99, dando $99 - 21 + 1 = 79$ possibilidades.

Se o algarismo das unidades é menor do que 4, obtemos ao inverter o número um número menor do que $4000 < 4204$.

O total é $3990 + 560 + 79 = 4629$.

---

20. *Resposta:* 0050

Colocar sinal de + ou − não altera a paridade dos números. Como temos 50 números pares e 50 números ímpares, a soma dos números é sempre par, logo há no máximo 50 possíveis restos na divisão por 100, que são os dois últimos dígitos.

Para obter todas as possibilidades, note que $-1 + 2 = -3 + 4 = \cdots = -99 + 100 = 1$ e $1 - 2 = 3 - 4 = \cdots = 99 - 100 = -1$, em um total de 50 números iguais a 1 ou -1. Assim, usamos k 1's e $50 - k$ -1's, e obtemos soma $k \cdot 1 + (50 - k) \cdot (-1) = 2k - 50$. Fazendo $k = 1, 2, \ldots, 50$, obtemos todos os pares entre -48, que deixa resto $100 - 48 = 52$ e 50. Assim, obtemos, na ordem, os restos $52, 54, 56, \ldots, 98, 0, 2, \ldots, 50$.

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. C	2. E	3. B	4. D	5. A
6. E	7. D	8. C	9. E	10. D
11. C	12. B	13. D	14. E	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	5583	4629	1012	3000	0089

Soluções – Testes

1. *Alternativa C*

Sendo $20^{24} = (2^2 \cdot 5)^{24} = 2^{48} \cdot 5^{24}$, e $8^z \cdot 25^w = (2^3)^z \cdot (5^2)^w = 2^{3z} \cdot 5^{2w}$, temos $x = 48$, $y = 24$, $3z = 48$ e $2w = 24$, de modo que $x + y + z + w = 48 + 24 + 48/3 + 24/2 = 100$.

---

2. *Alternativa E*

O tempo total de corrida de Lucas é $21 \cdot (6 \text{ min } 50 \text{ s}) = 21 \cdot 6$ minutos mais $21 \cdot 50$ segundos. O tempo de Lucas nos 14 quilômetros iniciais é $14 \cdot (6 \text{ min } 42 \text{ s}) = 14 \cdot 6$ minutos mais $14 \cdot 42$ segundos. Assim, o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros é

$$\frac{21 \cdot 6 \text{ min} + 21 \cdot 50 \text{ s} - 14 \cdot 6 \text{ min} - 14 \cdot 42 \text{ s}}{7} = \frac{7 \cdot 6 \text{ min} + 7 \cdot (150 - 84) \text{ s}}{7} = 6 \text{ min } 66 \text{ s} = 7 \text{ min } 6 \text{ s}.$$

---

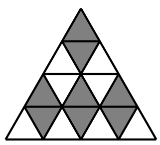
3. *Alternativa B*

Como um ano tem 365 ou 366 dias e 366 dividido por 7 é 52 com resto 2, em um ano há 52 semanas mais 1 ou 2 dias. Logo há 52 ou 53 quintas-feiras. Cada mês tem quatro ou cinco quintas-feiras. Como 52 dividido por 4 é 4 com resto 4 e 53 dividido por 12 é 4 com resto 5, há 4 ou 5 meses com cinco quintas-feiras.

---

4. *Alternativa D*

Pinte os triângulos com números ímpares:



A soma de números inteiros é par quando a quantidade de parcelas ímpares é par. Assim, devemos contar a quantidade de triângulos com uma quantidade par de triângulos pintados em seu interior. Chame de *tamanho* do triângulo o tamanho de seu lado com relação aos triângulos menores. Dividimos em casos:

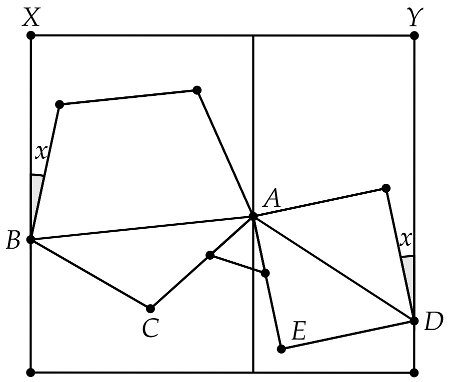
- Há 8 triângulos de tamanho 1 pintados e 8 triângulos de tamanho 1 não pintado.
- Todo triângulo de tamanho 2 tem em seu interior um losango pintado ou não pintado mais dois triângulos menores da cor oposta. Assim, cada triângulo de tamanho 2 tem uma quantidade par de triângulos pintados em seu interior. São 7 triângulos no total: $1 + 2 + 3 = 6$ apontando para cima e um, ligando os pontos médios do triângulo maior, apontando para baixo.
- Há três triângulos de tamanho 3, um em cada canto do triângulo maior, com 5, 4 e 4 triângulos pintados.
- O triângulo maior tem 8 triângulos pintados em seu interior.

O total é $8 + 7 + 2 + 1 = 18$.

---

5. *Alternativa A*

Trace as diagonais como na figura a seguir. Os ângulos internos do pentágono regular e do quadrado são, respectivamente, $\frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ e 90°. Trace também uma reta vertical passando pelo vértice comum ao pentágono e ao quadrado.



No triângulo ABC, $\angle ABC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$; no triângulo ADE, $\angle ADE = \angle EAD = 45^\circ$. O ângulo $\angle BAD$ mede

$$\angle BAC + \angle CAE + \angle EAD = \angle ABX + \angle ADY \iff 36^\circ + 60^\circ + 45^\circ = x + (108^\circ - 36^\circ) + x + 45^\circ \iff x = 12^\circ.$$

---

6. *Alternativa E*

A quantidade $2024 + 41 = 2065$ de balas é múltipla da quantidade de alunos na sala; como 41 é o mínimo de balas que ela deve comprar, a quantidade de alunos na sala é maior do que 41. Sendo $2065 = 5 \cdot 7 \cdot 59$, seus divisores são $1, 5, 7, 35, 59, 5 \cdot 59, 7 \cdot 59, 2065$. O único número entre 42 e 100 é 59, então a sala tem 59 alunos.

---

7. *Alternativa D*

- A afirmação i não é necessariamente verdadeira, pois Ana e outra pessoa podem ser as únicas pessoas mentirosas da cidade.
- A afirmação ii é verdadeira. Se Ana é mentirosa, existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade (Ana); se Ana fala a verdade, a quantidade de pessoas mentirosas na cidade é ímpar e, portanto, diferente de zero, ou seja, existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade.
- A afirmação iii é verdadeira. Se Ana diz a verdade, existe pelo menos uma pessoa que fala a verdade na cidade (Ana); se Ana mente, a quantidade de pessoas mentirosas na cidade é par, e como a cidade tem um total ímpar (2025) de habitantes, a quantidade de pessoas que falam a verdade na cidade é ímpar, ou seja, existe pelo menos uma pessoa que fala a verdade na cidade.
- A afirmação iv é verdadeira. Se Ana diz a verdade, a quantidade de pessoas mentirosas é ímpar e a quantidade de pessoas que falam a verdade é par, sendo Ana uma delas. Assim, outra pessoa fala a verdade. Se Ana mente, pela afirmação iii existe uma pessoa que fala a verdade na cidade, que não é Ana.

---

8. *Alternativa C*

Temos $DE = EC$, $\angle ADE = \angle ECG$ (retos) e $\angle AED = \angle CEG$ (opostos pelo vértice). Assim, pelo caso ALA, os triângulos ADE e GCE são congruentes; logo $CG = AD = 4$. Da mesma forma, os triângulos AHF e BGF são congruentes. Logo $AH = BG = BC + CG = 4 + 4 = 8$. Assim o triângulo AGH tem base $AH = 8$ e altura $AB = 8$, e portanto área $\frac{8\cdot 8}{2} = 32$.

---

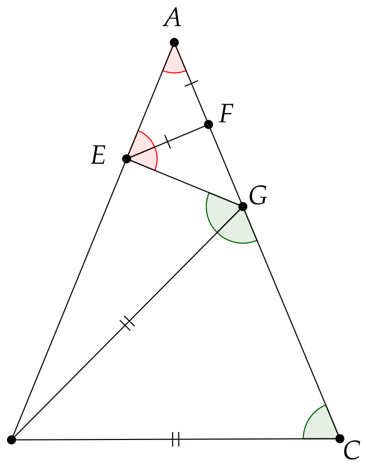
9. *Alternativa E*

Nos próximos 24 anos terrestres teremos $24 \times 365 + 6 = 8766$ dias, sendo os 6 adicionais devido aos $24/4 = 6$ anos bissextos. Como estamos no dia 51 do mês 4, faltam 50 para acabar o ano. Dessa forma, precisamos distribuir $8766 - 50 = 8716$ dias nos próximos anos.

Note que a cada dois anos, temos 505 dias em Xorpzorp. Logo, como $8716 = 17 \times 505 + 131$, teremos $17 \times 2 = 34$ anos completos e 131 dias adicionais. Como em 2024 o mês 4 tem 51 dias, ele dura 252 dias e, portanto, após 34 anos também teremos um ano que dura 252 dias. Dessa forma, os 131 dias restantes entram em um ano que começa com 51 e então estaremos no dia $131 - 51 - 50 = 30$ do mês 3.

Finalmente, para descobrir o dia da semana, note que $8766 = 11 \times 796 + 10$. Logo, passarão 796 semanas completas e mais 10 dias, de modo que estaremos em uma 3^a-feira.

10. *Alternativa D*



Seja $\angle BAC = \alpha$. Como $AF = EF$, temos que $\angle AEF = \alpha$. Temos também que $\angle FEG = \alpha$, já que EF é bissetriz de $\angle AEG$. Logo, por ângulo externo, temos que

$$\angle EGC = \angle BAC + \angle AEG = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Como BG é bissetriz interna, segue que $\angle BGC = \frac{3\alpha}{2}$ e, sendo $BC = BG$, obtemos $\angle BCA = \angle BGC = \frac{3\alpha}{2}$. Finalmente, sendo ABC isósceles de base BC, temos que $\angle ABC = \angle BCA = \frac{3\alpha}{2}$. Portanto, fazendo a soma dos ângulos internos de ABC:

$$\alpha + \frac{3\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2} = 180^\circ \iff \alpha = 45^\circ.$$

---

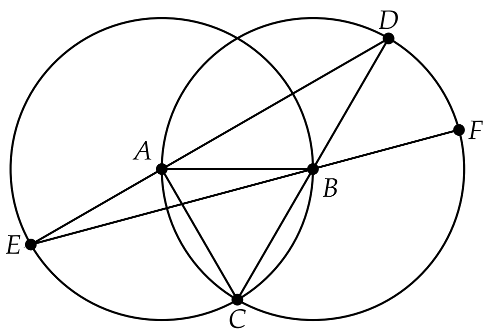
11. *Alternativa C*

Ao apagar os dígitos de ordem maior do que as centenas, vemos o número módulo 1000. Assim, o k-ésimo número é $23k \bmod 1000$. Note que $23 \cdot 5 = 115$, de modo que 115 é o quinto número que aparece. Agora, como o inverso de 23 módulo 1000 é 87 (de fato, $23 \cdot 87 = 2001 \equiv 1 \pmod{1000}$), para obter a posição de 116 basta somar 87, de modo que 116 é o 92º número, e assim por diante. Por outro lado, para obter a posição de 114 devemos subtrair 87 módulo 1000 de 5, obtendo $5 - 87 \equiv 918 \pmod{1000}$. Portanto 114 é o último número entre as alternativas (o 918º) que aparece.

---

12. *Alternativa B*

No triângulo ABC, $AB = AC$ (raios do círculo da esquerda) e $BA = BC$ (raios do círculo da direita). Assim, o triângulo ABC é equilátero. Em particular, $\angle ABC = 60^\circ$.



No triângulo ABD, $BA = BD$ (raios) e o ângulo externo a $\angle ABD$ mede $\angle ABC = 60^\circ$. Logo $\angle BAD = \angle ADB = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. No triângulo ABE, $AB = AE$ (raios) e o ângulo externo a $\angle BAE$ mede $\angle BAD = 30^\circ$. Portanto $\angle DEF = \angle AEB = \angle ABE = \frac{\angle BAD}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

---

13. *Alternativa D*

Há $3^6 = 729$ maneiras de pintar os pontos arbitrariamente. Vamos descontar as que têm três pontos colineares da mesma cor. Faremos isso a partir da quantidade total de pontos da cor que mais aparece.

- Os seis pontos são da mesma cor. Há 3 possibilidades (escolhemos a cor).
- Cinco pontos são da mesma cor. De qualquer forma aparece três pontos colineares da mesma cor, de modo que há $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ possibilidades: escolhemos a cor dos cinco pontos, qual ponto tem outra cor e qual das duas outras cores esse ponto tem.
- Quatro pontos são da mesma cor. Escolhemos a reta à qual pertencem os três pontos colineares (4 possibilidades), qual é a cor (3 possibilidades), qual é o outro ponto $6 - 3 = 3$ possibilidades e as cores dos outros pontos (2^2 possibilidades). São $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2^2 = 144$ possibilidades.
- Três pontos são da mesma cor. Escolhemos a reta à qual pertencem os três pontos colineares (4 possibilidades), qual é a cor (3 possibilidades) e quais são as cores dos outros pontos (2^3 possibilidades). Mesmo que os outros três pontos sejam da mesma cor, podemos identificar as cores a partir de qual tem três pontos colineares e qual não tem, de modo que não há repetições nessa contagem. Com isso, há $4 \cdot 3 \cdot 2^3 = 96$ possibilidades.

O total pedido é, então, $729 - 3 - 36 - 144 - 96 = 450$.

---

14. *Alternativa E*

Substituindo $c = a + b^3$ em $a^3 + b = 4c$, obtemos

$$a^3 + b = 4(a + b^3) \iff a^3 - 4a = 4b^3 - b.$$

De $ab = -1$, temos que $b = -\frac{1}{a}$. Substituindo, concluímos que

$$a^3 - 4a = 4\left(-\frac{1}{a}\right)^3 - \left(-\frac{1}{a}\right) \iff a^6 - 4a^4 - a^2 + 4 = 0.$$

Agora note que este último polinômio fatora:

$$a^6 - 4a^4 - a^2 + 4 = 0 \iff (a^2 - 4)(a^4 - 1) = 0 \iff (a - 2)(a + 2)(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = 0.$$

Logo, como $a^2 + 1 > 0$, há 4 valores de a: $-2, -1, 1, 2$.

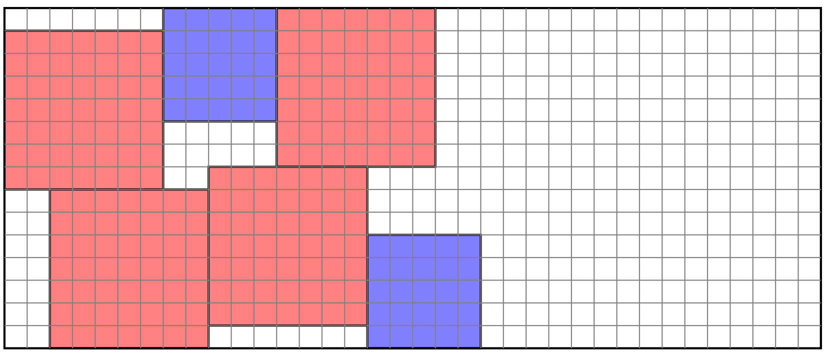
---

15. *Alternativa D*

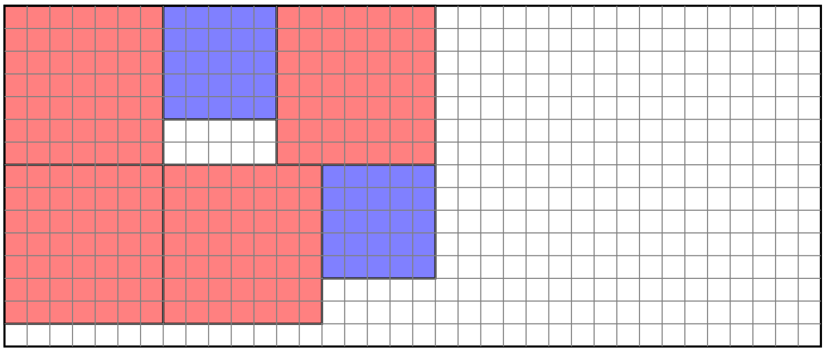
Preenchendo um retângulo 15×35 com $3 \cdot 7 = 21$ quadrados de lado 5, deixamos $36 \cdot 15 - 35 \cdot 15 = 15$ quadradinhos descobertos. Mostremos que não é possível deixar menos quadradinhos descobertos. De fato, mostraremos que se usarmos algum quadrado de lado 7 deixamos mais de 15 quadradinhos descobertos.

Para cada cobertura, ordene os quadrados de acordo com sua casa superior esquerda, da esquerda para a direita; em caso de empates, ordene de cima para baixo. Dada uma cobertura, desloque, na ordem citada acima, cada quadrado o máximo para a esquerda, e depois o máximo para cima, sem causar sobreposições. Após essa operação, reordene se necessário os quadrados, seguindo a mesma regra.

Assim,



se transforma em



Suponha, por absurdo, que uma cobertura deixa menos de 15 casas vazias e que há pelo menos um quadrado de lado 7. Considere as sete colunas ocupadas pelo primeiro quadrado de lado 7 na ordem acima, após o deslocamento. Isso quer dizer que todas as casas de todas colunas à esquerda dessas estão ocupadas por quadrados de lado 5; se isso não ocorre, há pelo menos um quadrado 5×5 “vago”, e há pelo menos 25 casas vazias. Há outras $8 \cdot 7 = 56$ casas nessas colunas, nenhuma das quais ocupadas por casas de quadrados anteriores. Considere o primeiro quadrado Q cujo canto superior esquerdo está contido no conjunto A consistindo nessas 56 casas (Q deve existir, senão há pelo menos 56 casas vazias). Pelo deslocamento, a primeira coluna de Q deve ser a primeira das sete colunas de A. Se Q tem lado 5, em cada uma das cinco colunas de Q, que estão contidas nas colunas de A, há pelo menos 3 casas vazias, pois sendo $15 - 7 - 5 = 3$ não há espaço para mais quadrados, e há $5 \cdot 3 = 15$ casas vazias. Então Q deve ter lado 7, e as 7 colunas são ocupadas por dois quadrados de lado 7.

O último parágrafo mostra que podemos supor que as colunas são ocupadas por três quadrados de lado 5 ou dois quadrados de lado 7 (deixando, nesse caso, 7 casas vazias), ou é deixada vazia. Se existe uma coluna vazia, então temos pelo menos 15 casas vazias; então nenhuma coluna fica vazia. Por outro lado, se usamos dois quadrados de lado 7 mais de duas vezes, temos pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vazias, então usamos dois quadrados de lado 7 no máximo duas vezes. Mas nenhum dos números 36, $36-7 = 29$, $36-2\cdot 7 = 22$ é múltiplo de 5, então também não é possível cobrir todas as colunas, absurdo.

Com isso, o melhor é não usar quadrados de lado 7, e deixamos no mínimo 15 casas vazias.

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 5583

Seja x o número de três algarismos obtido após apagar o algarismo das unidades de N. Assim, $N = 10x + 3$ e $M = 3000 + x$. Com isso,

$$M = N - 2025 \iff 3000 + x = 10x + 3 - 2025 \iff x = 558.$$

---

17. *Resposta:* 4629

Seja N um número que ganha de 2024, ou seja, tal que $N > 2024$ e o número invertendo os algarismos de N é maior do que 4202. Se o algarismo U das unidades de N é 5, 6, 7, 8 ou 9, então os outros três algarismos MCD de $N = MCDU$ variam entre 202 e 999. Temos que N ganha de 2024, pois ao inverter os algarismos obtemos $UDCM$, com um milhar U maior do que 4, e portanto um número maior do que 4202. Há, nesse caso, $5 \cdot (999 - 202 + 1) = 3990$ possibilidades.

Se o algarismo das unidades de N é 4, dividimos em dois casos: se o algarismo das dezenas é 3 ou mais (7 possibilidades), ao inverter obtemos $4DCM > 4300 > 4202$. O das centenas pode ser qualquer um e o dos milhares pode ser qualquer um maior ou igual a 2. Há $7 \cdot 10 \cdot 8 = 560$ possibilidades. Se o algarismo das dezenas é 2, a inversão de N é $42CM$ e basta que $CM > 02$, ou seja, os outros dois algarismos MC variem entre 21 e 99, dando $99 - 21 + 1 = 79$ possibilidades.

Se o algarismo das unidades é menor do que 4, obtemos ao inverter o número um número menor do que $4000 < 4204$.

O total é $3990 + 560 + 79 = 4629$.

---

18. *Resposta:* 1012

Note que há 1012 números ímpares, ou seja, uma quantidade par. Dessa forma, independentemente dos sinais escolhidos, a soma sempre será par e, portanto, o resto na divisão por 2024 também é par. Seja

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2023 + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 1012 \cdot 2025.$$

Note que S deixa resto 1012 na divisão por 2024. Observe também que, ao mudarmos o sinal do i-ésimo termo em S, o valor diminui de $2i$, ou seja, temos que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (i-1) - i + (i + 1 + \cdots + 2024) = S - 2i.$$

Dessa forma, variando i de 1 até 2024, obtemos os restos

$$1010, 1008, \ldots, 4, 2, 0, 2022, 2020, \ldots, 1012.$$

Dessa forma, alcançamos todos os restos pares na divisão por 2024.

---

19. *Resposta:* 3000

Sendo $S_n = a^n + b^n + c^n$, por soma de Newton, sabemos que para $n \geq 3$ vale

$$S_n = (a+b+c) \cdot S_{n-1} - (ab+bc+ca) \cdot S_{n-2} + abc \cdot S_{n-3}.$$

Note que

$$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{10^2 - 20}{2} = 40.$$

Temos também que $S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3$, $S_1 = 10$ e $S_2 = 20$, de modo que

$$S_3 = (a+b+c) \cdot S_2 - (ab+bc+ca) \cdot S_1 + abc \cdot S_0 \iff 30 = 10 \cdot 20 - 40 \cdot 10 + abc \cdot 3 \iff abc = \frac{230}{3}.$$

Assim, temos $S_1 = 10, S_2 = 20, S_3 = 30$ e

$$S_n = 10 \cdot S_{n-1} - 40 \cdot S_{n-2} + \frac{230}{3} \cdot S_{n-3}.$$

Calculando S_4, obtemos

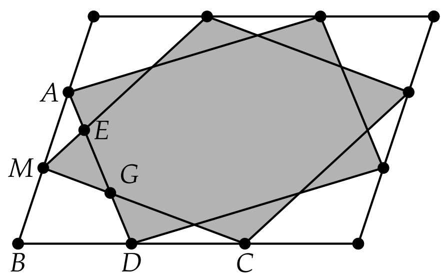
$$S_4 = 10 \cdot S_3 - 40 \cdot S_2 + \frac{230}{3} \cdot S_1 = \frac{800}{3}.$$

Finalmente, calculando $S_5 = a^5 + b^5 + c^5$, temos que

$$S_5 = 10 \cdot S_4 - 40 \cdot S_3 + \frac{230}{3} \cdot S_2 = 3000.$$

---

20. *Resposta:* 0089



Por simetria, E está à metade da altura h do paralelogramo. Como A está à altura $\frac{2h}{3}$, $\frac{AE}{AD} = \frac{\frac{2h}{3} - \frac{h}{2}}{\frac{2h}{3}} = \frac{1}{4}$. Além disso, no triângulo ABC, G é baricentro, logo $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$. Com isso, $\frac{EG}{AD} = \frac{AG - AE}{AD} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

No triângulo ABD, M está à metade da altura com relação a AD. Assim, o triângulo MEG tem $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$ da área de ABD. Com isso, a área não pintada é 4 vezes $1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$ a área de ABD, ou seja, $\frac{19}{6}$ a área de ABD.

Agora, ABD tem como base BD, que é um terço da base do paralelogramo, e altura igual a $\frac{2h}{3}$, de modo que a área de ABD é $\frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdot 13 = \frac{1}{9}$ da área do paralelogramo.

Com isso, a área não pintada é $\frac{19}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{19}{54}$ da área do paralelogramo, a área pintada é $1 - \frac{19}{54} = \frac{35}{54}$ da área do paralelogramo, e a resposta é $35 + 54 = 89$.

3ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. E	2. A	3. B	4. B	5. A
6. D	7. B	8. B	9. E	10. D
11. C	12. E	13. D	14. D	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0038	0089	0096	0019	5045

Soluções – Testes

1. *Alternativa E*

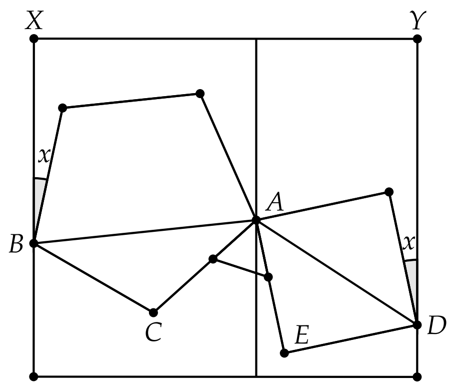
O tempo total de corrida de Lucas é $21 \cdot (6 \text{ min } 50 \text{ s}) = 21 \cdot 6$ minutos mais $21 \cdot 50$ segundos. O tempo de Lucas nos 14 quilômetros iniciais é $14 \cdot (6 \text{ min } 42 \text{ s}) = 14 \cdot 6$ minutos mais $14 \cdot 42$ segundos. Assim, o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros é

$$\frac{21 \cdot 6 \text{ min} + 21 \cdot 50 \text{ s} - 14 \cdot 6 \text{ min} - 14 \cdot 42 \text{ s}}{7} = \frac{7 \cdot 6 \text{ min} + 7 \cdot (150 - 84) \text{ s}}{7} = 6 \text{ min } 66 \text{ s} = 7 \text{ min } 6 \text{ s}.$$

---

2. *Alternativa A*

Trace as diagonais como na figura a seguir. Os ângulos internos do pentágono regular e do quadrado são, respectivamente, $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ e 90°. Trace também uma reta vertical passando pelo vértice comum ao pentágono e ao quadrado.



No triângulo ABC, $\angle ABC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$; no triângulo ADE, $\angle ADE = \angle EAD = 45^\circ$. O ângulo $\angle BAD$ mede

$$\angle BAC + \angle CAE + \angle EAD = \angle ABX + \angle ADY \iff 36^\circ + 60^\circ + 45^\circ = x + (108^\circ - 36^\circ) + x + 45^\circ \iff x = 12^\circ.$$

---

3. *Alternativa B*

Sejam d a quantidade de dias no mês (d pode ser 28, 29, 30 ou 31) e x a quantidade de dias em que Miguelito chorou 73 vezes. Então

$$73x + 42(d - x) = 2024 \iff 31x = 2024 - 42d \iff x = 66 - d - \frac{11(d+2)}{31}.$$

Temos que $d + 2$ precisa ser múltiplo de 31, logo $d = 29$ e a quantidade de dias em que Miguelito chorou 73 vezes é

$$x = 66 - 29 - 11 = 26.$$

---

4. *Alternativa B*

Como um ano tem 365 ou 366 dias e 366 dividido por 7 é 52 com resto 2, em um ano há 52 semanas mais 1 ou 2 dias. Logo há 52 ou 53 quintas-feiras. Cada mês tem quatro ou cinco quintas-feiras. Como 52 dividido por 4 é 4 com resto 4 e 53 dividido por 12 é 4 com resto 5, há 4 ou 5 meses com cinco quintas-feiras.

---

5. *Alternativa A*

De $b = 1 + \frac{a}{b}$ conclui-se que $b > 1 \implies 2b - 1 > 0$ e $a = b^2 - b$. Logo

$$2b - \sqrt{1+4a} = 2b - \sqrt{1+4b^2-4b} = 2b - \sqrt{(2b-1)^2} = 2b - |2b-1| = 2b - (2b-1) = 1.$$

---

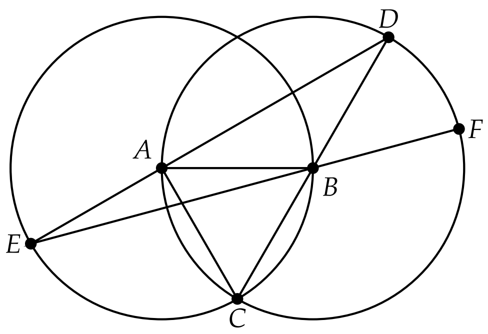
6. *Alternativa D*

- A afirmação i não é necessariamente verdadeira, pois Ana e outra pessoa podem ser as únicas pessoas mentirosas da cidade.
- A afirmação ii é verdadeira. Se Ana é mentirosa, existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade (Ana); se Ana fala a verdade, a quantidade de pessoas mentirosas na cidade é ímpar e, portanto, diferente de zero, ou seja, existe pelo menos uma pessoa mentirosa na cidade.
- A afirmação iii é verdadeira. Se Ana diz a verdade, existe pelo menos uma pessoa que fala a verdade na cidade (Ana); se Ana mente, a quantidade de pessoas mentirosas na cidade é par, e como a cidade tem um total ímpar (2025) de habitantes, a quantidade de pessoas que falam a verdade na cidade é ímpar, ou seja, existe pelo menos uma pessoa que fala a verdade na cidade.
- A afirmação iv é verdadeira. Se Ana diz a verdade, a quantidade de pessoas mentirosas é ímpar e a quantidade de pessoas que falam a verdade é par, sendo Ana uma delas. Assim, outra pessoa fala a verdade. Se Ana mente, pela afirmação iii existe uma pessoa que fala a verdade na cidade, que não é Ana.

---

7. *Alternativa B*

No triângulo ABC, $AB = AC$ (raios do círculo da esquerda) e $BA = BC$ (raios do círculo da direita). Assim, o triângulo ABC é equilátero. Em particular, $\angle ABC = 60^\circ$.



No triângulo ABD, $BA = BD$ (raios) e o ângulo externo a $\angle ABD$ mede $\angle ABC = 60^\circ$. Logo $\angle BAD = \angle ADB = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. No triângulo ABE, $AB = AE$ (raios) e o ângulo externo a $\angle BAE$ mede $\angle BAD = 30^\circ$. Portanto $\angle DEF = \angle AEB = \angle ABE = \frac{\angle BAD}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

---

8. *Alternativa B*

Seja a a coordenada x do ponto em que OBMario faz seu segundo pulo. Assim, OBMario está à altura $6a - a^2$, e tem mais $8 - a$ unidades para se mover para a direita, aumentando sua altura em $6(8-a) - (8-a)^2$. Com isso, a altura que OBMario alcança é

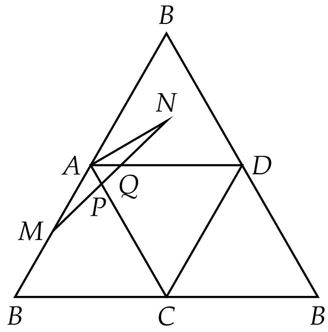
$$h = 6a - a^2 + 6(8-a) - (8-a)^2 = -2a^2 + 16a - 16 = 16 - 2(a-4)^2,$$

e o maior valor possível de h é 16.

---

9. *Alternativa E*

Considere a seguinte planificação do tetraedro:



Pela desigualdade triangular, na planificação $MP + PQ + QN \leq MN$. No triângulo AMN, $AM = \frac{12}{2} = 6$, $AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ e $\angle MAN = 180° - 30° = 150°$. Logo, pela lei dos cossenos, o valor mínimo de $MP + PQ + QN$ é

$$\sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 150°} = 2\sqrt{9 + 12 + 12\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{39}.$$

---

10. *Alternativa D*

Há $3^6 = 729$ maneiras de pintar os pontos arbitrariamente. Vamos descontar as que têm três pontos colineares da mesma cor. Faremos isso a partir da quantidade total de pontos da cor que mais aparece.

- Os seis pontos são da mesma cor. Há 3 possibilidades (escolhemos a cor).
- Cinco pontos são da mesma cor. De qualquer forma aparece três pontos colineares da mesma cor, de modo que há $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ possibilidades: escolhemos a cor dos cinco pontos, qual ponto tem outra cor e qual das duas outras cores esse ponto tem.
- Quatro pontos são da mesma cor. Escolhemos a reta à qual pertencem os três pontos colineares (4 possibilidades), qual é a cor (3 possibilidades), qual é o outro ponto $6 - 3 = 3$ possibilidades e as cores dos outros pontos (2^2 possibilidades). São $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2^2 = 144$ possibilidades.
- Três pontos são da mesma cor. Escolhemos a reta à qual pertencem os três pontos colineares (4 possibilidades), qual é a cor (3 possibilidades) e quais são as cores dos outros pontos (2^3 possibilidades). Mesmo que os outros três pontos sejam da mesma cor, podemos identificar as cores a partir de qual tem três pontos colineares e qual não tem, de modo que não há repetições nessa contagem. Com isso, há $4 \cdot 3 \cdot 2^3 = 96$ possibilidades.

O total pedido é, então, $729 - 3 - 36 - 144 - 96 = 450$.

---

11. *Alternativa C*

Ao apagar os dígitos de ordem maior do que as centenas, vemos o número módulo 1000. Assim, o k-ésimo número é $23k \bmod 1000$. Note que $23 \cdot 5 = 115$, de modo que 115 é o quinto número que aparece. Agora, como o inverso de 23 módulo 1000 é 87 (de fato, $23 \cdot 87 = 2001 \equiv 1 \pmod{1000}$), para obter a posição de 116 basta somar 87, de modo que 116 é o 92º número, e assim por diante. Por outro lado, para obter a posição de 114 devemos subtrair 87 módulo 1000 de 5, obtendo $5 - 87 \equiv 918 \pmod{1000}$. Portanto 114 é o último número entre as alternativas (o 918º) que aparece.

---

12. *Alternativa E*

Podemos supor, sem perdas, que os lados são, na ordem, 1, 2, 3 e 4 (de fato, basta permutar as cordas que representam os lados no círculo, que o círculo se mantém). Seja θ o ângulo entre os lados 1 e 2, de modo que $180° - \theta$ é o ângulo entre os lados 3 e 4. Sendo x a medida da diagonal oposta a ambos esses ângulos, pela lei dos cossenos

$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) \iff \cos\theta = \frac{1^2 + 2^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{x^2 - 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1^2 + 2^2 - x^2 + x^2 - 3^2 - 4^2}{2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{5}{7}.$$

Logo $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $x^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-\frac{5}{7}) \iff x = \frac{\sqrt{385}}{7}$ e o raio do círculo circunscrito, pela lei dos senos, é

$$2R = \frac{x}{\operatorname{sen}\theta} \iff R = \frac{\frac{\sqrt{385}}{7}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{\sqrt{2310}}{24}.$$

---

13. *Alternativa D*

Sendo $30^9 = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^9$, temos $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ e $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$, com cada um dos nove expoentes entre 0 e 9. Deste modo, o espaço amostral tem 10^9 elementos.

Seja (a, b, c) uma tripla interessante. Então $a \neq 1$, $b \neq 1$ e $c \neq 1$ pois o contrário implicaria $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Como $\text{mdc}(b, c) > 1$, b e c têm pelo menos um fator primo $p \in \{2, 3, 5\}$ em comum. Se a é múltiplo de 30, ou seja, tem fatores 2, 3 e 5, a tem um fator primo p, que divide $\text{mdc}(a, b, c)$, o que é um absurdo pois $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Assim a não pode ser múltiplo de 30, assim como b e c. Se a é potência de um primo q, como a tem fator em comum com b e c, q divide b, c, e consequentemente, $\text{mdc}(a, b, c)$, outro absurdo. Logo a (e nem b, nem c) é potência de primo.

Deste modo, cada número tem exatamente dois fatores primos distintos, sendo que um deles tem 2 e 3 como fatores, outro tem 2 e 5 e o outro tem 3 e 5. Há 3! maneiras de escolher qual número tem quais fatores e cada um dos seis fatores tem 9 possibilidades de expoente na fatoração. Consequentemente, o evento tem $3! \cdot 9^6 = 2 \cdot 3^{13}$ elementos.

A probabilidade pedida é, então, $\frac{2 \cdot 3^{13}}{10^9}$.

---

14. *Alternativa D*

Sendo $z = x + yi$, $f(z) = (x + yi)^2 + 5(x + yi) + c = x^2 + 5x + c - y^2 + (2xy + 5y)i$. Tal valor é igual a $\bar{z} = x - yi$ se, e somente se,

$$\left|\begin{array}{r} x^2 + 5x + c - y^2 = x \\ 2xy + 5y = -y \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{c} x^2 + 5x + c - y^2 = x \\ (y = 0 \text{ ou } x = -3) \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{c} (y = 0 \text{ e } x^2 + 4x + c = 0) \\ \text{ou} \\ (x = -3 \text{ e } y^2 = c - 3) \end{array}\right.$$

Para que existam quatro soluções, devemos ter duas raízes distintas para cada equação quadrática, ou seja, $4 - 4 \cdot 1 \cdot c > 0$ e $c - 3 > 0 \iff 3 < c < 4$. Note que se $x = -3$ na primeira linha então $c = -(-3)^2 + 4 \cdot (-3) = 3$ e se $y = 0$ na segunda linha então $c = 3$. Ou seja, as duas equações não têm soluções em comum.

---

15. *Alternativa D*

Inicialmente vamos escolher a cor que ficará de fora do novo mural. Há 3 possibilidades para tal decisão (vermelha, azul ou verde).

Agora vamos definir a ordem em que instalaremos as novas lâmpadas. Como resta apenas 1 de determinada cor e 2 de cada umas das outras cores, tal decisão corresponde ao número de anagramas do multiset $\{A, A, B, B, C\}$, ou seja, é $\frac{5!}{2!\,2!\,1!}$. Quem é A e quem é B determinamos por ordem alfabética entre as cores com duas lâmpadas.

Finalmente, fixe um dos anagramas acima e seja 1 a primeira lâmpada do mural, 2 a segunda, ..., 5 a quinta. A escolha da cor e do momento em que cada lâmpada será removida e instalada corresponde aos anagramas do multiset $\{L_1, L_1, L_2, L_2, \ldots, L_5, L_5\}$. Aqui temos $\frac{10!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!}$ possibilidades no total.

Por exemplo, se as decisões são (verde, $ACBAB$, $L_3L_4L_2L_4L_1L_1L_5L_5L_2L_3$), então:

1. A corresponde às bolas azuis, B às vermelhas e C à bola verde.

2. A ordem em que colocaremos as lâmpadas é Azul, Verde, Vermelha, Azul e Vermelha.

3. - A lâmpada da posição 3 é removida no primeiro movimento e instalada no décimo. Como é a quinta a ser instalada: cor B, vermelha.

   - A lâmpada da posição 4 é removida no segundo movimento e instalada no quarto. Como é a primeira a ser instalada: cor A, azul.

   - A lâmpada da posição 2 é removida no terceiro movimento e instalada no nono. Como é a quarta a ser instalada: cor A, azul.

   - A lâmpada da posição 1 é removida no quinto movimento e instalada no sexto. Como é a segunda a ser instalada: cor C, verde.

   - A lâmpada da posição 5 é removida no sétimo movimento e instalada no oitavo. Como é a terceira a ser instalada: cor B, vermelha.

Logo o número de maneiras é

$$3 \cdot \frac{5!}{2!\,2!\,1!} \cdot \frac{10!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!} = \frac{10! \cdot 6!}{2^8}.$$

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 0038

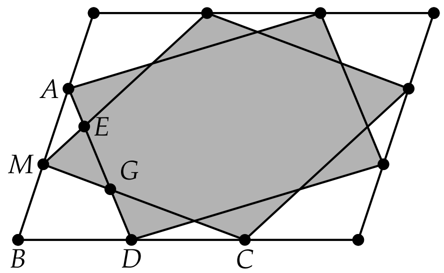
A soma das duas raízes de $x^2 - 12x - 19p = 0$ é 12 e o produto das raízes é $-19p$. Se uma das raízes é ± 1, temos $19p = x(x-12) \in \{-11, 13\}$, sendo que nenhum desses dois números é múltiplo de 19. Assim, sendo p primo, as raízes são p e -19, para os quais $p + (-19) = 12 \iff p = 31$, ou as raízes são $-p$ e 19, para os quais $-p + 19 = 12 \iff p = 7$.

A soma das possibilidades é $31 + 7 = 38$.

---

17. *Resposta:* 0089

Uma solução:



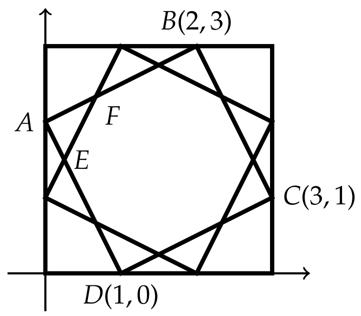
Por simetria, E está à metade da altura h do paralelogramo. Como A está à altura $\frac{2h}{3}$, $\frac{AE}{AD} = \frac{\frac{2h}{3} - \frac{h}{2}}{\frac{2h}{3}} = \frac{1}{4}$. Além disso, no triângulo ABC, G é baricentro, logo $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$. Com isso, $\frac{EG}{AD} = \frac{AG - AE}{AD} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

No triângulo ABD, M está à metade da altura com relação a AD. Assim, o triângulo MEG tem $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$ da área de ABD. Com isso, a área não pintada é 4 vezes $1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$ a área de ABD, ou seja, $\frac{19}{6}$ a área de ABD.

Agora, ABD tem como base BD, que é um terço da base do paralelogramo, e altura igual a $\frac{2h}{3}$, de modo que a área de ABD é $\frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdot 13 = \frac{1}{9}$ da área do paralelogramo.

Com isso, a área não pintada é $\frac{19}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{19}{54}$ da área do paralelogramo, a área pintada é $1 - \frac{19}{54} = \frac{35}{54}$ da área do paralelogramo, e a resposta é $35 + 54 = 89$.

Outra solução: Por meio de uma projeção, podemos reduzir o problema ao cálculo da relação entre a área da região sombreada abaixo e do quadrado de lado 3.



Como $ABCD$ é um quadrado de lado $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, basta calcular a área do triângulo AEF.

O ponto E é a intersecção da reta $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ e da reta $y - 1 = \frac{3-1}{1-0}(x - 0) \iff y = 2x + 1$. Ou seja, $E = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$. O ponto F é a intersecção da reta $y = 2x + 1$ e da reta $y - 2 = \frac{3-2}{2-0}(x - 0) \iff y = \frac{1}{2}x + 2$. Ou seja, $F = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Logo

$$\text{área}(AEF) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{24}.$$

A razão pedida é, portanto,

$$\frac{(\sqrt{5})^2 + 4 \cdot \frac{5}{24}}{3^2} = \frac{35}{54}.$$

O valor pedido é $35 + 54 = 89$.

18. *Resposta:* 0096

Seja $Q(x) = P(x) - x^5$. Então Q tem como raízes 1, 2, 3, 4 e 5 e tem grau no máximo 5, pois P tem grau 5. Assim,

$$P(x) - x^5 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5),$$

e

$$P(6) = 6^5 + a \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6^5 + 120a.$$

O menor valor possível para $P(6)$ é, portanto, o resto da divisão de 6^5 por 120. Como $6^5 = 24 \cdot 9 \cdot 6^2$ e $120 = 24 \cdot 5$, o resto é $24 \cdot (9 \cdot 6^2 \bmod 5) = 24 \cdot (4 \cdot 1^2 \bmod 5) = 96$.

19. *Resposta:* 0019

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}=1 \iff \frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_2a_3a_4a_5}+\frac{1}{a_2a_3a_4a_5a_6}=a_1-1$$

Logo, sendo $S(n,k)$ o número de soluções de

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}+\cdots+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5\ldots a_n}=k,$$

o valor pedido é $S(6,1) = \sum_{1\le a_1-1\le 5} S(5, a_1-1)$, pois $S(n,k) = 0$ para $k > n$.

De fato, como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}+\cdots+\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5\ldots a_n}=k\\ \iff &\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_2a_3a_4a_5}+\cdots+\frac{1}{a_2a_3a_4a_5\ldots a_n}=ka_1-1,\end{aligned}$$

concluímos que

$$S(n,k) = \sum_{1\le ka_1-1\le n-1} S(n-1, ka_1-1)$$

e podemos completar a tabela a seguir:

$S(n,k)$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$k=1$	1	1	2	4	9
$k=2$	0	1	1	3	5
$k=3$	0	0	1	1	3
$k=4$	0	0	0	1	1
$k=5$	0	0	0	0	1

Portanto $S(6,1) = 19$.

20. *Resposta:* 5045

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} - xyz = 123 \iff x^3+y^3+z^3-3xyz = 3^2\cdot 41 \iff (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = 3^2\cdot 41.$$

Seja $x+y+z=k$. Então

$$\left|\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-(xy+xz+yz) = \frac{3^2\cdot 41}{k}\\ &x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) = k^2\end{aligned}\right.,$$

em que k é um divisor maior ou igual a 3 de $3^2\cdot 41$.

Logo

$$\left|\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2 = \frac{k^2}{3}+\frac{2\cdot 3\cdot 41}{k}\\ &xy+xz+yz = \frac{k^2}{3}-\frac{3\cdot 41}{k}\end{aligned}\right..$$

É imediato que k não pode ser 3, 3^2, 41 ou $3^2\cdot 41$. Logo $k = 3\cdot 41$ e

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{k^2}{3}+\frac{2\cdot 3\cdot 41}{k} = 3\cdot 41^2+2 = 5045.$$

De fato, podemos tomar, por exemplo, $x=40$, $y=41$ e $z=42$.