XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Escrevemos, em fila, os números 1, 2, 3, …, n. A cada passo, tomamos os dois últimos números da fila anterior, escrevemos primeiramente o último, depois o penúltimo e, enfim, os outros $n – 2$, na ordem em que aparecem. Por exemplo, para $n = 12$ obtemos

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \to 12, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$
$$\to 10, 9, 12, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \to \ldots$$

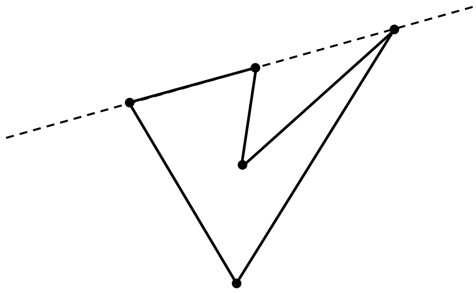
Qual a menor quantidade de passos necessários para escrevermos novamente os números 1, 2, 3, …, n, nessa ordem, quando

(a) $n = 2006$?

(b) $n = 2005$?

PROBLEMA 2

Dentre os polígonos de 5 lados, o maior número possível de vértices alinhados, isto é, pertencentes a uma única reta, é três, como mostrado a seguir.



Qual é a maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter?

Atenção: além de desenhar um polígono de 12 lados com o número máximo de vértices alinhados, lembre-se de mostrar que não existe um outro polígono de 12 lados com mais vértices alinhados do que este.

PROBLEMA 3

Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 – y^3 = 3(x^2 – y^2)$.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Quantos subconjuntos $\{a, b, c\}$ de três elementos distintos de $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ são tais que b é a média aritmética de a e c $(a < b < c)$?

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o seu ortocentro. Sejam M, N e R os pontos médios de AB, BC e AH, respectivamente. Determine a medida do ângulo $M\hat{N}R$ se o ângulo $A\hat{B}C$ mede 70°.

PROBLEMA 6

Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \ldots, J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4, …, J_{k-1} ganhou de J_k, J_k ganhou de J_1.

Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.